Corrigé Examen Calcul différentiel

Ex 1

Soit $g : E \to F$

$x \mapsto f(x) - L(x)$

g est continue sur E, différentiable sur $E \setminus \{a\}$

et $\forall x \in E \setminus \{a\}$, $Dg(x) = Df(x) - L$.

Comme $\lim_{x \to a} Df(x) = L$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon > 0$ tel que

$\forall x \in B(a, r_\varepsilon) \setminus \{a\}$ $\quad \|Df(x) - L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, comme pour tout $h \in B(0, r_\varepsilon) \setminus \{0\}$ et $0 < \alpha < 1$ il est clair que $[a + \alpha h, a + h] \subset B(a, r_\varepsilon) \setminus \{a\}$, on déduit du T.A.F. que

$$\| g(a+h) - g(a + \alpha h) \|_F \leq \varepsilon \| (1-\alpha) h \|_E$$

On fait tendre $\alpha \to 0$, par continuité de $x \mapsto g(x)$ il vient $\quad \| g(a+h) - g(a) \|_F \leq \varepsilon \| h \|_E$

$$\iff \| f(a+h) - f(a) - L(h) \|_F \leq \varepsilon \| h \|_E$$

Ce qui donne le résultat cherché, par définition.

Ex 2 ① On pose $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{array}$, $k: \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{array}$

g est C^∞ et k est C^∞ comme composée de

$i: \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (x, x) \end{array}$ et $j: \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{array}$.

i est C^∞ car linéaire continue et j est C^∞ car bilinéaire continue. Comme $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto x \end{array}$ est C^∞ car linéaire continue, on en déduit que

$$f = (g \circ k)\, \mathrm{Id} \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

$Dk(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$ et $Dg(t)(\alpha) = -e^{-t}\alpha$

$$\Rightarrow D(g\circ k)(x)(h) = [Dg(k(x)) \circ Dk(x)](h)$$
$$= -2e^{-\|x\|^2}\langle x, h\rangle$$

$$\Rightarrow Df(x)(h) = x\, D(g\circ k)(x)(h) + h\, (g\circ k)(x)$$
$$= e^{-\|x\|^2}\left[h - 2\langle x, h\rangle x\right]$$

③ $\ker Df(x) = \{h \in \mathbb{R}^n,\ Df(x)(h) = 0\}$

$Df(x)(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2\langle x, h\rangle x$

$$\Rightarrow \|h\|_{\mathbb{R}^n} = 2|\langle x, h\rangle|\, \|x\|$$
$$\leq 2\|h\|_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2_{\mathbb{R}^n}$$

par Cauchy-Schwarz.

Pour $h \neq 0$ cela implique

$$2\|x\|^2 \geq 1 \Rightarrow \|x\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\forall x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$,

$\ker Df(x) = \{0\}$.

3-a) $\varphi(t) = t e^{-t^2}$. φ est strict $\nearrow$ sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

donc φ induit une bijection de $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ sur

$$[\varphi(0), \varphi(\tfrac{1}{\sqrt{2}})] = [0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}].$$

b) $\forall (x,y) \in B^2$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow e^{-\|x\|^2} x = e^{-\|y\|^2} y \quad (*)$$

$$\Rightarrow e^{-\|x\|^2} \|x\| = e^{-\|y\|^2} \|y\|$$

$$\Rightarrow \varphi(\|x\|) = \varphi(\|y\|)$$

Comme $(x,y) \in B^2$, $(\|x\|, \|y\|) \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}[^2$

et donc d'après a), $\|x\| = \|y\|$

On déduit donc de $(*)$ que $x = y$

$\Rightarrow f$ est injective sur B.

(4) D'après (3) f est une bijection de B dans $f(B)$. Déterminons $f(B)$.

$\forall x \in B$, $\|f(x)\| \leq e^{-\|x\|^2}\|x\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$ donc

$$f(B) \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \|y\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \right\}$$

Inversement $\forall y \in \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \|y\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \right\} \setminus \{0\}$ si on pose $x = \varphi^{-1}(\|y\|)\frac{y}{\|y\|}$, il vient

$$f(x) = e^{-(\varphi^{-1}(\|y\|))^2}\varphi^{-1}(\|y\|)\frac{y}{\|y\|}$$

$$= \varphi \circ \varphi^{-1}(\|y\|)\frac{y}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|y\|}y = y.$$

où $\varphi^{-1} : \left[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right] \longrightarrow \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ est la réciproque de φ. On obtient donc

$$f(B) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \|y\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \right\}$$

Finalement, comme $\forall x \in B$, $Df(x) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on déduit du théorème d'inversion locale que f est un C^1 difféomorphisme de B dans l'ouvert $\left\{ y \in \mathbb{R}^n, \|y\| < \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \right\}$.

Ex 3 : ① $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1

$Df(0) = DT(0) - Id$. Comme 1 n'est pas valeur propre de $DT(0)$, $\ker Df(0) = \{0\}$.

donc $Df(0) \in Isom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et d'après le Thm d'inversion locale $\exists$ U un voisinage de 0 et V un voisinage de $f(0) = 0$ tels que f soit un C^1-difféo de U sur $V = f(U)$.

② - Comme $0 \in U$ et f est une bijection de U ds $f(U)$,

$\forall x \in U, \quad f(x) = f(0) = 0 \iff x = 0$

ce qui peut aussi s'écrire

$\forall x \in U \; , \; T(x) - x = 0 \iff x = 0$

donc 0 est l'unique point fixe de T dans U. C'est un point fixe isolé de T.

③ $T_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto T(x) - \lambda S(x)$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(\lambda, x) \mapsto \underbrace{T(x) - x}_{f(x)} - \lambda S(x)$$

g est C^1 et $\partial_2 g(0,0) = DT(0) - Id \in Isom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

D'après le thm des fonctions implicites

$\exists$ U un voisinage de 0 ds $\mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ et

une application $\varphi :]-\delta, \delta[\to U$ de classe C^1

tels que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U$, $\forall |\lambda| < \delta$,

$$g(\lambda, x) = g(0,0) = 0 \iff x = \varphi(\lambda)$$

Donc $\forall \lambda \in]-\delta, \delta[$,

$$g(\lambda, x) = 0 \text{ et } x \in U \iff x = \varphi(\lambda)$$

ce qui peut aussi s'écrire : $\forall \lambda \in]-\delta, \delta[$,

$$x = T_\lambda(x) \text{ et } x \in U \iff x = \varphi(\lambda)$$

D'où l'existence et l'unicité d'un point

fixe $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ de T_λ ds U pour $\lambda \in]-\delta, \delta[$

De plus $\lambda \mapsto x_\lambda = \varphi(\lambda)$ est de classe C^1

sur $]-\delta, \delta[$.

(4) $G(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} T_t \\ t \end{pmatrix}$ ~~6~~

avec $T_t(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x e^{x} + y \\ \sin z \\ 2y \cos x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)} \\ \cos(x+y-z) \\ 1 \end{pmatrix}$

$= T(x,y,z) + t\, S(x,y,z)$

T et S sont de classe C^1 et

$$DT(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(DT(0) - \lambda I) = (2-\lambda)[\lambda^2 - 2]$

donc 1 n'est pas valeur propre de $DT(0)$.

D'après (3), il existe donc $\delta > 0$ et $U \subset \mathbb{R}^3$ un voisinage de 0 tel que pour $|t| < \delta$, T_t a un unique point fixe x_t dans U.

On en déduit que (x_t, t) est l'unique point fixe de G dans $U \times \{t\}$.

Ex 4

1) $x \mapsto \langle b, x \rangle$ est linéaire continue donc C^∞ sur $\mathbb{R}^n$

$x \mapsto \langle Ax, Ax \rangle$ est la composée de

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{array}, \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ y \mapsto (y, y) \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \end{array}$$

Les 2 1ère fct sont linéaires continues et la 3ième est bilinéaire continues. Elles sont donc toutes 3 C^∞ $\Rightarrow$ J est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$

2. $$DJ(x)(h) = \langle Ax, Ah \rangle - \langle b, h \rangle$$

$$D^2J(x)(h, q) = \langle Ah, Aq \rangle$$

3- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

donc $A^T A$ est symétrique

$\forall x \neq 0$, $\langle A^T A x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$

$= \|Ax\|^2 > 0$

car A est inversible. donc $A^T A$ est symétrique définie positive.

(9)

4_ $DJ(x) = 0 \iff \langle Ax, Ah\rangle - \langle b, h\rangle = 0$
$\forall h \in \mathbb{R}^n$

$\iff \langle A^TAx - b, h\rangle = 0$
$\forall h \in \mathbb{R}^n$

$\iff A^TAx = b$

$\iff x = (A^TA)^{-1}b$

En effet A^TA et inversible car définie positive
De plus notant $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres on doit avoir $\lambda_1 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

(*) $\langle A^TAx, x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|^2$

Donc $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$D^2J(x)(h,h) \geq \lambda_1 \|h\|^2$$

ce qui implique que J admet un minimum local strict en $(A^TA)^{-1}b$

5_ D'après (*) et Cauchy-Schwarz

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle A^TAx, x\rangle - \langle b, x\rangle$$
$$\geq \frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2 - \|b\|\,\|x\|$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \|x\| \left(\lambda_1 \|x\| - \|b\| \right)$$

donc $J(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

6) D'après 5- $\exists R > 0 \, / \, \forall \|x\| \geqslant R$

$$J(x) \geqslant J\left((A^TA)^{-1} b\right) + 1$$

D'un autre côté $(AA^T)^{-1} b$ et l'unique point de minimum local de J dans $B(0,R)$.
Comme J et continue elle admet un minimum dans $\overline{B(0,R)}$ qui et un compact.
Ce minimum ne peut pas être atteint sur le bord $\{|x| = R\}$ car $J(x) \geqslant J((A^TA)^{-1}b)+1$ sur $\{|x| = R\}$. Il et donc atteint dans $B(0,R)$ et doit par conséquent être un minimum local de J sur $B(0,R)$.
Le seul candidat étant $(AA^T)^{-1}b$ on en déduit que

$$J\left((A^TA)^{-1} b\right) = \min_{x \in \overline{B(0,R)}} J(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \langle (A^TA)^{-1} b, b \rangle .$$