

Correction DS 1 d'algèbre

Ex 1

(i) On peut montrer que $*$ est bien une L.C.I

soit $y \in]-1,1[$, on pose $f_y: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$$

f_y dérivable et

$$f_y'(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$f_y(-1) = -1 \text{ et } f_y(1) = 1 \Rightarrow f_y([-1,1]) = [-1,1]$$

ii) $*$ associative car $\forall (x, y, z) \in]-1,1[^3$

$$(x * y) * z = x * (y * z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+xz}$$

iii) 0 est élément neutre car $\forall x \in]-1,1[$

$$x * 0 = \frac{x}{1} = x = 0 * x$$

iv) $\forall x \in]-1,1[$, $x^{-*} = -x$ car

$$x * (-x) = 0 = (-x) * x$$

Excl. $(G, *)$ est un groupe

Il est abélien car $x * y = y * x$

$$f(x, y) \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}$$

(2) On peut montrer que $*$ n'est pas associative.

$$(2 * 3) * 4 = 6 * 4 = 6/4 = 3/2$$

$$2 * (3 * 4) = 2 * 12 = 24 \neq$$

Ex 2

$$(1) \phi_2 : (GL_2(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(AB) &= \det(AB) = \det A \det B \\ &= \phi_1(A) \phi_1(B) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_2$ morphisme

$$\text{Ker } \phi_1 = \{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } \phi_1 \Rightarrow \phi_1 \text{ non injective.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x \text{ donc } \phi_2 \text{ surjective.}$$

$$(2) \quad \phi_2 : (\text{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (\text{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$$

$$\forall (A, B) \in (\text{GL}_2(\mathbb{R}))^2$$

$$\phi_2(AB) = (AB)^2$$

$$\phi_2(AB) = \phi_2(A) \phi_2(B) \Leftrightarrow (AB)^2 = A^2 B^2$$

$$\Leftrightarrow AB = BA$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \exists (A, B) \in (\text{GL}_2(\mathbb{R}))^2 / AB \neq BA$$

$$\Rightarrow \phi_2(AB) \neq \phi_2(A) \phi_2(B)$$

$$\rightarrow \phi_2 \text{ n'est pas un morphisme.}$$

$$(3) \quad \phi_3: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$$

$$\phi_3(x+y) = 2(x+y) = \phi_3(x) + \phi_3(y)$$

$\Rightarrow \phi_3$ morphisme

$$\phi_3(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ donc } \phi_3 \text{ injective}$$

$$\forall y \in \mathbb{Q}, y = \phi_3(y/2) \text{ et } y/2 \in \mathbb{Q}$$

donc ϕ_3 surjective

$$(4) \quad \phi_4: (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$$

$$\begin{aligned} \phi_4(z z') &= |z z'|^{-1} = |z|^{-1} |z'|^{-1} \\ &= \phi_4(z) \phi_4(z') \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_4$ morphisme.

$$\phi_4(z) = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[$$

ϕ_4 n'est pas injective

ϕ_4 n'est pas surjective car $\forall z \in \mathbb{C}^*, \phi_4(z) > 0$.

Ex 3

(1) • $H < G$ donc $e \in H$

$$\Rightarrow z e z^{-1} = e \in z H z^{-1} \Rightarrow z H z^{-1} \text{ non vide}$$

• Soit $(x, y) \in (z H z^{-1})^2$, $\exists (h, g) \in H^2$

$$x = z h z^{-1} \text{ et } y = z g z^{-1}$$

$$\Rightarrow xy^{-1} = z h z^{-1} z g^{-1} z^{-1} = z \underbrace{h g^{-1}}_{\in H} z^{-1}$$

$$\text{donc } xy^{-1} \in z H z^{-1}$$

Enfin: $z H z^{-1} < G$.

(2) • Montrons $z \notin H \Rightarrow z H$ n'est pas un ^{sous groupe}

$$z \notin H \Rightarrow z^{-1} \notin H \Rightarrow e \notin z H \text{ car}$$

$$z h = e \Rightarrow h = z^{-1}$$

• Montrons $z \in H \Rightarrow z H < G$

$$z = z e \in z H \Rightarrow z H \neq \emptyset$$

Soient $x = z h_1$ et $y = z h_2$ avec $(h_1, h_2) \in H^2$

$$xy^{-1} = z h_1 h_2^{-1} z^{-1} \in z H \text{ car } h_1 h_2^{-1} z^{-1} \in H$$

Donc $zH < G$.

Comme $\phi: H \rightarrow zH$
 $\phi: h \mapsto zh$ est bijective

on a $\phi(zH) = \phi(H)$. En particulier

si $z \in H$ et $\phi(H) < \infty$, $zH = H$ car

on a clairement $zH \subset H$. En fait

c'est toujours vrai même sans l'hypothèse

$\phi(H) < \infty$ car $\forall h \in H, h = z(z^{-1}h)$

$$= \phi(z^{-1}h)$$

donc $\phi(H) = H$.

Ex 4

Montrons $AB \leq BA \Rightarrow AB < G$

• $AB \neq \emptyset$ car $e_G = e_G e_G \in AB$

• Soient $x = ab$ et $y = a'b' \in AB$

$$xy^{-1} = a \underbrace{b b'^{-1} a'^{-1}}_{\in BA}$$

Comme $AB \leq BA$, $\exists a_1 \in A$ et $b_1 \in B$ tel

que $b b'^{-1} a'^{-1} = a, b_1$

$$\Rightarrow xy^{-1} = \underbrace{aa_1}_{\in A} \underbrace{b_1}_{\in B} \in AB$$

$$\Rightarrow AB \subset G.$$

Montrons $AB \subset G \Rightarrow AB \subset BA$

. Soit $x \in BA$. $x = ba$ avec $a \in A, b \in B$

$$\Rightarrow x^{-1} = a^{-1} b^{-1} \in AB. \text{ Comme } AB \subset G$$

$$\text{on en déduit } x = (x^{-1})^{-1} \in AB$$

$$\text{donc } BA \subset AB$$

. Soit $x \in AB$. Comme $AB \subset G$ on a

$$x^{-1} \in AB \Rightarrow \exists a \in A \cup b \in B \text{ tels que}$$

$$x^{-1} = ab \Rightarrow x = (x^{-1})^{-1} = b^{-1} a^{-1} \in BA$$

$$\text{donc } AB \subset BA$$

concl $AB \subset BA$

E5

① Soit $\phi_a: E \rightarrow E$
 $x \mapsto a * x$

Comme a est régulier, ϕ_a est injective.

En effet $\phi_a(x) = \phi_a(y) \Rightarrow a * x = a * y$
 $\Rightarrow x = y$

Comme $\text{card}(E) < \infty$ on en déduit que ϕ_a est une bijection de E sur lui-même.

Donc $\exists e \in E / \phi_a(e) = a \Leftrightarrow a * e = a$

② $\forall x \in E,$

$$a * x = (a * e) * x = a * (e * x)$$

donc $e * x = x$. car a régulier.

On peut procéder de même avec

$$\tilde{\phi}_a: E \rightarrow E$$
$$x \mapsto x * a$$

$\tilde{\phi}_a$ est une bijection de E donc $\exists e' \in E$

tel que $e' * a = a$

$$\Rightarrow \forall x \in E, x * a = x * (e' * a) = (x * e') * a$$

$\Rightarrow x * e' = x$ car a régulier

En particulier on a

$$e * e' = e \text{ et } e * e' = e'$$

donc $e = e'$.

conclusion: $\exists e \in E / \forall x \in E$

$$e * x = x * e = x$$

(3) Soit $x \in E$. Comme tout pt de E est

régulier $\phi_x : E \rightarrow E$
 $y \mapsto x * y$ est

bijjective $\Rightarrow \exists x^* \in E / x * x^* = e$.

On a $\hat{\phi}_x : E \rightarrow E$
 $y \mapsto y * x$ est bijective

$$\Rightarrow \exists x^{**} \in E / x^{**} * x = e$$

Mais $x^{**} * x = e \Rightarrow x^{**} * (x * x^*) = x^{**} * e = x^{**}$
 $\parallel$
 $\Rightarrow x^{**} = e$

Donc x^{-1} vérifie

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

$\Rightarrow$ tout elt admet un inverse par $*$

$\Rightarrow (E, *)$ est un groupe

(4) Non. Contre-exemple $E = \mathbb{N}$

$*$ = addition

$+$ est une LCI sur $\mathbb{N}$

Sat $n \in \mathbb{N}, \forall (m, m') \in \mathbb{N}^2$

$$n + m = n + m' \Rightarrow m = m'$$

Donc tous les elt de $\mathbb{N}$ sont réguliers
par $+$ mais $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.