Calcul Différentiel

Corrigé du Partiel

Exercice 1. $f, g : O \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur O.

Montrons que la fonction $\varphi = f \cdot g$ est différentiable sur O.

Soit $F : O \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x) = (f(x), g(x))$, $x \in O$ et $\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(a,b) = ab$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\varphi = \theta \circ F$

f et g sont différentiables sur O donc F est différentiable sur O (cours)

et on a $DF(x)h = (Df(x)h, Dg(x)h)$, $\forall x \in O$, $\forall h \in E$

θ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$D\theta(a,b)(h_1, h_2) = \frac{\partial \theta}{\partial a}(a,b)\, h_1 + \frac{\partial \theta}{\partial b}(a,b)\, h_2 = b h_1 + a h_2$$

Conclusion la fonction $\varphi = \theta \circ F$ est différentiable sur O et on a : $\forall x \in O$,

$D\varphi(x) = D\theta(F(x)) \circ DF(x)$. On obtient :

$$\forall x \in O, \forall h \in E \quad D\varphi(x)h = D\theta(f(x), g(x))[Df(x)h, Dg(x)h]$$
$$= g(x)[Df(x)h] + f(x)[Dg(x)h].$$

Exercice 2

1°) a) $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\theta(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \langle x, x \rangle$ et $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\alpha(t) = \sqrt{t}$

On a f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $Df(x)h = 2\langle x, h \rangle$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$ (voir TD). α est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $\theta = \alpha \circ f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad D\theta(x)h = D\alpha(\theta(x))[D\theta(x)h]$$
$$= \alpha'(\theta(x))\, 2\langle x, h \rangle = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$$

b) Si θ est differentiable en 0 aura $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(0+th) - (0)}{t} = Df(0)h$

$h \neq 0$ $\frac{f(0+th) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t} \|h\|$, ce rapport n'admet pas de limite quand h tend vers 0. Donc θ n'est pas différentiable en 0.

2) $u \in \mathbb{R}^n$. $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = <u,x> e^{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}^n$

a) Soit $f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = <u,x>$. f_1 est linéaire continue ($\dim \mathbb{R}^n = n < +\infty$) donc f_1 est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $Df_1(x)h = f_1(h) = <u,h>$.

Soit $f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^{\|x\|}$. On a $f_2 = \beta \circ \theta$ avec $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta(t) = e^t$. θ étant différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a f_2 est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$Df_2(x)h = D\beta(\theta(x))[D\theta(x)h] = \beta'(\theta(x)) \frac{<x,h>}{\|x\|} = e^{\|x\|} \frac{<x,h>}{\|x\|}.$$

On a $\varphi = f_1 \cdot f_2$. L'exercice 1 nous donne que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $D\varphi(x)h = f_2(x)[Df_1(x)h] + f_1(x)[Df_2(x)h]$

$$\Rightarrow D\varphi(x)h = e^{\|x\|}<u,h> + <u,x><x,h> \frac{e^{\|x\|}}{\|x\|}.$$

b) Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on $\varphi(0+h) = <u,h> e^{\|h\|} = <u,h>(1 + \varepsilon_1(\|h\|))$

avec $\varepsilon_1(\|h\|) \longrightarrow 0$ qd $h \longrightarrow 0$ ($e^t = 1 + \varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_1(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$), $\varphi(0) = 0$

D'où $\varphi(0+h) = \varphi(0) + <u,h> + <u,h>\varepsilon_1(\|h\|)$

La fonction $L : h \longmapsto <u,h>$ est linéaire continue et on a

$$|<u,h>\varepsilon_1(\|h\|)| \leq \|u\|\|h\|\varepsilon_1(\|h\|) \Rightarrow \frac{<u,h>\varepsilon_1(\|h\|)}{\|h\|} \longrightarrow 0$$

Conclusion φ est différentiable en 0 et on a $\underline{D\varphi(0)h = <u,h>, \forall h \in}$

3°) D'après l'expression de $D\varphi(x)$ pour $x \neq 0$ il est évident que l'applicatio $D\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour montrer que φ est de classe C^1, il suffit donc de montrer que $D\varphi$ est continue en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $D\varphi(x)h - D\varphi(0)h = (e^{\|x\|} - \ )<u,h>$

$$+ <u,x><x,h> \frac{e^{\|x\|}}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow |D\varphi(x)h - D\varphi(0)h| \leq (e^{\|x\|} - 1)\|u\|\|h\| + \|u\|\|x\|\|h\| e^{\|x\|}$$

Ceci nous donne que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a

$$|||D\varphi(x) - D\varphi(0)||| \leq (e^{\|x\|} - 1)\|u\| + \|u\|\|x\| e^{\|x\|} \longrightarrow 0 \text{ q. } \|x\| \to 0$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} |||D\varphi(x) - D\varphi(0)||| = 0$. et $D\varphi$ est continue en 0

Conclusion φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1°/ $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Considerons la fonction $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(A) = A^2$

On a g est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir TD) et on a

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $Dg(A)H = AH + HA$.

D'où f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $Df(A)H = H - \frac{1}{2}(AH + HA)$

2°/ Soit $A \in \mathcal{B}$ $(\|A - I\| < \frac{1}{2})$ D'après 1°/ on a

$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Df(A)H = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}AH - \frac{1}{2}HA = \frac{1}{2}(I - A)H + \frac{H}{2}(I - A)$

et $\|Df(A)H\| \leq \frac{1}{2}\|(I - A)H\| + \frac{1}{2}\|H(I - A)\|$

$\leq \frac{1}{2}\|I - A\|\|H\| + \frac{1}{2}\|H\|\|I - A\| = \|I - A\|\|H\| \leq \frac{1}{2}\|H\|$

Ceci nous donne que $\forall A \in \mathcal{B}$ on a $|||Df(A)||| \leq \frac{1}{2}$. $\mathcal{B}$ étant convexe on obtient d'après le théorème des accroissements finis que :

$\|f(X) - f(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|$ $\forall X, Y \in \mathcal{B}$.

3) On suppose que $B \in \mathcal{B}$. $\forall A \in \mathcal{B}$ on a $\|f(A) - I\| \leq \|f(A) - f(I)\| + \|f(I) - I\|$

avec $\|f(A) - f(I)\| \leq \frac{1}{2}\|A - I\| \leq \frac{1}{4}$ et $\|f(I) - I\| = \frac{1}{2}\|I - B\| \leq \frac{1}{4}$

d'où $\|f(A) - I\| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ie $f(A) \in \mathcal{B}$. Ceci nous donne que $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est une fonction contractante. $\mathcal{B}$ est ferm[é] donc $\mathcal{B}$ est complet. le théorème de point fixe nous donne : $\exists!\, A \in \mathcal{B}$ tel que $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B) = A \Rightarrow A^2 = B$. de plus si $X \in \mathcal{B}$ et $X^2 = B$ on a $f(X) = X$ et par unicité on a $X = A$.