

# Correction CC2 algèbre

Exercice 1 : Voir correction CC1

Exercice 2 :

1. Non  $H$  n'est pas distingué. On a

$$(13)(12)(13) = (23) \notin H$$

$$[S_3 : H] = o(S_3) / o(H) = 6/2 = 3$$

2. Il y a 3 classes à gauche modulo  $H$ .

Elles sont de la forme  $gH$  avec  $g \in S_3$ .

Une classe est  $\text{Id } H = H$

Comme  $(13)(12) = (123)$ , une

autre classe est  $(13)H = \{(13), (123)\}$

Comme les classes à gauche modulo  $H$  forment une partition de  $S_3$ , le 3<sup>ème</sup> élément de  $S_3/H$  est  $\{(23), (132)\}$

(2)

$o(K) = 3$  donc  $[S_3; K] = 2$ . Par conséquent les 2 éléments de  $S_3/K$  sont  $K$  et  $S_3 - K = \{(12), (13), (23)\}$

3. Comme  $e_g H e_g^{-1} = H$ ,  $e_g \in N_G(H)$  et  $N_G(H) \neq \emptyset$ . Soit  $(a, b) \in N_G(H)^2$

$$(a b^{-1}) H (a b^{-1})^{-1} = a b^{-1} H b a^{-1} \quad (*)$$

Comme  $b \in N_G(H)$  on a

$$b H b^{-1} = H \Leftrightarrow b^{-1} b H b^{-1} b = b^{-1} H b \\ \Leftrightarrow H = b^{-1} H b$$

Donc  $(*) \Rightarrow (a b^{-1}) H (a b^{-1})^{-1} = a H a^{-1} = H$   
et par conséquent  $a b^{-1} \in N_G(H)$ .

Ceci montre que  $N_G(H) < G$

Maintenant on sait que pour tout groupe  $H$  et tout  $h \in H$ ,

$$\phi_h : H \rightarrow H \\ g \mapsto h g h^{-1} \quad \text{et un automorphisme}$$

(3)

donc par fait  $h \in M$ ,  
 $h M h^{-1} = M$ .

et par conséquent  $M \trianglelefteq N_G(M)$ .

4. Pour tout  $g \in N_G(M)$  on a  
 $g M g^{-1} = M$

donc  $M \trianglelefteq N_G(M)$

5. Les seuls sous-groupes de  $S_3$  contenant  $H$  sont  $H$  et  $S_3$ . Comme  $H$  n'est pas distingué dans  $S_3$  on doit avoir

$$N_{S_3}(H) = H.$$

Comme  $K$  est distingué dans  $S_3$ ,

$$\text{on a } N_{S_3}(K) = S_3.$$

## Exercice 3

$$1. \quad o(\bar{1}) = 6, \quad o(\bar{2}) = 3, \quad o(\bar{3}) = 2 \\ \text{et } o(\bar{4}) = 3$$

$$2. \quad \{\bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$$3. \quad o(G) = 2 \times 3 = 6.$$

4.

$$\langle (\bar{1}, \hat{1}) \rangle = \{(\bar{0}, \hat{0}), (\bar{1}, \hat{1}), (\bar{0}, \hat{2}), (\bar{1}, \hat{0}), (\bar{0}, \hat{4}), (\bar{1}, \hat{3})\} \\ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

$$\bullet \quad o((\bar{1}, \hat{1})) = 6.$$

$G$  est un groupe cyclique d'ordre 6, il est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

## Exercice 4

1. Comme  $p$  est premier, d'après le théorème de Lagrange, les seuls ordres possibles pour les éléments du groupe sont 1 ou  $p$ . Comme un groupe

(5)  
n'a qu'un seul élément d'ordre 1 qui  
est son élément neutre, il contient  
 $p-1 \geq 1$  éléments d'ordre  $p$ . Il  
est donc cyclique

2. Non. Par exemple  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
est un groupe d'ordre  $4 = 2^2$   
qui n'est pas cyclique

3. Comme  $o(h) = p^k$ , on a  $h \neq e_H$   
et  $(h^{p^{k-1}})^p = h^{p^k} = e_H$   
donc  $o(h^{p^{k-1}}) \neq 1$  et  $o(h^{p^{k-1}})$  divise  
 $p$ . Par conséquent  $o(h^{p^{k-1}}) = p$ .

4. Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^n$  avec  
 $p$  premier et  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  
 $g \in G$  différent de  $e_G$ . D'après  
Lagrange  $o(g) = p^k$  avec

(6)

$1 \leq k \leq n$ . Si  $k = 1$  alors  
 $o(g) = p$  et  $\langle g \rangle$  est un sous-groupe  
cyclique d'ordre  $p$  de  $G$ . Sinon,  
 $o(g^{p^{k-1}}) = p$  et  $\langle g^{p^{k-1}} \rangle$  est  
un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $G$ .