Université de Tours
L3 Licende de mathématiques.

Année 2008-2009

Calcul Différentiel

Examen Partiel

Exercice 1.

Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur un ouvert O de E a valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont différentiables sur O alors la fonction $\varphi = f.g$ est différentiable sur O et on a

$$\forall x \in O, \forall h \in E, \quad D\varphi(x)h = g(x)\left[Df(x)h\right] + f(x)\left[Dg(x)h\right].$$

Indication: On pourra opérer par composition de fonctions.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de norme associée $||\ ||$.
1) a) Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
b) La fonction θ est-elle différentiable en 0 ?
2) soit $u \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = \langle u, x\rangle\, e^{||x||}.$$

a) Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad D\varphi(x)h = \langle u, h\rangle\, e^{||x||} + \langle u, x\rangle \frac{\langle x, h\rangle}{||x||}\, e^{||x||}.$$

b) Montrer que φ est différentiable en 0 et calculer $D\varphi(0)$.
3) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle $||\ ||$. ($\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||AB|| \leq ||A||\,||B||$).
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A - \frac{1}{2}\left(A^2 - B\right).$$

1) Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
2) On pose $\mathcal{B} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ ||I - A|| \leq \frac{1}{2}\right\}$. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{B}, \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||Df(A)H|| \leq \frac{1}{2}\,||H||.$$

En déduire que pour tous $X, Y \in \mathcal{B}$, on a

$$||f(X) - f(Y)|| \leq \frac{1}{2}\,||X - Y||.$$

3) On suppose que $B \in \mathcal{B}$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $f(A) \in \mathcal{B}$. (Indication: introduire la matrice $f(I) - I$). En déduire qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{B}$ qui vérifie $A^2 = B$.