
Université de Rennes 1
Institut de Recherche MATHématique de Rennes
École doctorale MATISSE

**Inégalités fonctionnelles et comportement en temps
long de quelques processus de Markov**

Florent MALRIEU

Document de synthèse présenté le

26 novembre 2010

en vue de l'obtention du diplôme

**d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
EN MATHÉMATIQUES**

Michel BENAÏM	Université de Neuchâtel	(rapporteur)
Francis COMETS	Université Paris 7	(rapporteur)
Martin HAIRER	Université de Warwick	(rapporteur)
Dominique BAKRY	Université de Toulouse	(examineur)
Arnaud DEBUSSCHE	ENS Cachan Antenne de Bretagne	(examineur)
Pierre DEL MORAL	INRIA Bordeaux	(examineur)
Ying HU	Université de Rennes 1	(examineur)
Denis TALAY	INRIA Sophia Antipolis	(examineur)

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Michel Benaïm, Francis Comets et Martin Hairer qui m'ont fait l'honneur d'accepter le rôle de rapporteur de ce manuscrit. Chacun à leur manière ils incarnent pour moi l'excellence scientifique car ils sont à la fois des chercheurs très perspicaces et des passeurs de science. Lorsque j'étais en thèse à Toulouse, j'ai eu l'occasion d'apprécier les qualités d'orateur et l'enthousiasme de Michel Benaïm. Nous avons par la suite discuté ensemble des liens entre équations de McKean-Vlasov et processus auto-stabilisants. C'était très enrichissant (même s'il reste de nombreuses questions sans réponses!). Depuis l'édition 1999 de Saint Flour, j'ai toujours eu plaisir à croiser la route de Francis Comets. Je me souviens notamment comment il nous avait expliqué la simulation parfaite à la Propp et Wilson sur une nappe en papier dans un restaurant dont j'ai oublié le nom! Enfin, j'ai souvent eu le plaisir de lire les travaux de Martin Hairer, qu'il s'agisse d'une note limpide revisitant la convergence des chaînes de Markov Harris récurrentes ou de l'étude élégante du trou spectral pour l'équation de Navier-Stokes.

Autant qu'il m'était possible, je me suis toujours attaché à relier mon travail à des motivations concrètes. Les objets que j'ai étudiés sont pour la plupart issus de modélisations (plus ou moins naïves il faut bien le reconnaître) de situations pratiques. Dans cette approche, mes échanges récurrents avec des chercheurs de l'INRIA m'ont beaucoup apporté. Pierre Del Moral et Denis Talay me font le plaisir de participer à mon jury comme un témoignage de nos collaborations nourries (Denis, je n'oublie pas notre satané contrôle de gradient...). Je leur associe également Philippe Robert dont j'ai apprécié le sens de l'accueil, la culture (pas seulement viticole) et la curiosité lors d'une visite à Rocquencourt ainsi que Frédéric Cérou, Arnaud Guyader et François Le Gland qui m'ont réservé le meilleur accueil cette année dans le projet ASPI.

Même si nous n'avons pas eu l'occasion de travailler ensemble depuis la fin de ma thèse, c'est un grand plaisir pour moi que Dominique Bakry fasse partie de mon jury d'habilitation. Nos discussions animées et franches sont pour beaucoup dans le goût que j'ai développé pour la recherche. Comme un ancien fumeur attaché à sa cigarette, je tente de me tenir à l'écart des inégalités logsobolesques mais il faut bien avouer que ce sont des objets si bougrement passionnants et utiles qu'il est difficile de s'en passer. De plus, leurs effets secondaires sur la santé humaine semblent tout à fait négligeables. On peut donc en user sans modération. Dernièrement, une mathématicienne que j'estime beaucoup (Sylvie M. pour ne pas la nommer) m'a dit après un exposé : « Tu ressembles de plus en plus à Bakry! ». Sûrement une histoire de courbure... En tous cas, je prends cela pour un formidable compliment!

En demandant à Arnaud Debussche de participer à mon jury, je voulais lui témoigner mon estime pour tout le travail d'organisation et d'animation de la recherche et de l'enseignement qu'il effectue à Rennes en plus de sa propre activité scientifique débordante. J'ai vraiment du mal à croire que nos journées aient la même durée!

Merci enfin à Ying Hu pour sa gentillesse et ses encouragements constants depuis que je suis arrivé à Rennes. J'en profite pour saluer Philippe B. et Philippe B. (Berthet et Briand) avec qui j'ai toujours eu plaisir à discuter maths et autres du temps où ils étaient rennais ainsi que

les nombreux membres de l'IRMAR qui rendent ce laboratoire chaleureux et vivant : Sébastien, David, Goulwen, Mihai, Grégory, Éric, Serge, Bernard, François et les autres !

Je voudrais également profiter de ces quelques lignes pour dire à quel point l'aspect le plus enthousiasmant de ce métier d'enseignant-chercheur est pour moi l'immense liberté (espérons que cela restera vrai à l'avenir) dans le choix des thématiques de recherche et des collaborations. Si mon travail de thèse a souvent été solitaire (hormis bien entendu l'aventure LogSob), j'ai pu développer ensuite des interactions (à courte et longue portées) variées et enrichissantes. Merci donc dans le désordre à François, Patrick, Jean-François, Joaquin, Benjamin, Arnaud, Tony, Ivan, Hélène, Jean-Baptiste, Denis, Katy, Stéphane et Djalil.

La vie à Rennes est bien agréable. Cela tient sans doute aux Rennais. Je pense notamment aux Bardet (qui ont malheureusement quitté nos contrées) et aux Guérin-Charpentier (qui reviendront je l'espère l'été prochain...), notamment pour vos qualités d'aubergistes!!! Il est vraiment formidable de pouvoir partager l'amitié, les joies familiales et le plaisir de chercher ensemble.

Même si son nom est déjà apparu plus haut, je tiens à nouveau à saluer mon dual topologique, j'ai bien sûr nommé Djalil. Ta curiosité, ton énergie et ton sens de la provoc sont très précieux pour moi. Longue vie à nos multiples questionnements (avec ou sans réponses)!

Je ne peux terminer ces lignes qu'avec une pensée pour la merveilleuse petite famille qui m'accompagne (et me subit parfois) au jour le jour : ma très chère Lise et les « Gnomis » Mewen, Anaël et Valentine... Merci pour votre soutien, votre vitalité et votre énergie!

Saint Malon sur Mel, novembre 2010.

Table des matières

Remerciements	iii
Publications	3
Introduction	5
1.1 Processus de Kolmogorov	5
1.2 Quelques inégalités fonctionnelles classiques	6
1.3 Distances de Wasserstein et couplage	8
1.4 Concentration de la mesure	9
1.5 Plan de la synthèse	9
2 Équations de McKean-Vlasov	11
2.1 Un monde idéal... ou presque	13
2.2 Interaction convexe dégénérée	14
2.3 Interaction via la fonction de répartition	15
2.4 Équation de Vlasov-Fokker-Planck	18
2.5 Ouvertures	20
3 Inégalités fonctionnelles et applications	23
3.1 Schémas d'Euler	23
3.1.1 Inégalité de Poincaré pour une diffusion générale	23
3.1.2 Inégalité de Sobolev logarithmique uniforme	24
3.1.3 Application à la simulation des équations de McKean-Vlasov	25
3.2 Diffusions inhomogènes	25
3.2.1 Introduction	26
3.2.2 Inégalités fonctionnelles locales inhomogènes	26
3.2.3 Application : estimation de la dissipation de l'entropie	28
3.3 Mélange de mesures	28
3.3.1 Concentration de la mesure	29
3.3.2 Inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique	29
3.3.3 Quelques exemples rassurants	30
3.3.4 Un premier exemple explosif	30
3.3.5 Un exemple surprenant	30
3.4 Ouvertures	31
4 Processus de Markov déterministes par morceaux	33
4.1 Modélisation du processus TCP	33
4.1.1 Le processus à temps continu	33
4.1.2 La chaîne incluse	35
4.2 Mouvement d'une bactérie	35
4.3 Diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients markoviens	37
4.4 Ouvertures	39
Bibliographie générale	46

Publications

Ce court chapitre recense mes publications. Elles sont également disponibles sur ma page web à l'adresse suivante :

<http://perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/>

Thèse de doctorat

- [T] F. MALRIEU, Inégalités de Sobolev logarithmiques pour des problèmes d'évolutions non linéaires *Thèse de doctorat de l'université Toulouse 3*, 2001, Hal

Livre

- [L1] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO, G. SCHEFFER
Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques
Panoramas et Synthèses 10, Société Mathématique de France (SMF) Paris (2000), 217 p. avec une préface de Dominique Bakry et Michel Ledoux

Articles dans des revues internationales à comité de lecture

- [A1] F. MALRIEU
Inégalités de Sobolev logarithmiques pour deux EDP non linéaires
C. R. Acad. Sci. Paris, (2000) t. 331, Série I, pp 819-822
- [A2] F. MALRIEU
Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's
Stochastic Processes and their Applications (2001) Vol. 95/1, pp 109-132
- [A3] I. GENTIL, F. MALRIEU
Équations de Hamilton-Jacobi et inégalités entropiques généralisées
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, (2002) t. 335, No. 5, 437-440
- [A4] F. MALRIEU
Convergence to equilibrium for granular media equations and their Euler schemes
Annals of Applied Probability (2003) Vol. 13, No. 2, pp 540-560
- [A5] P. CATTIAUX, A. GUILLIN, F. MALRIEU
Probabilistic approach for granular media equations in the non uniformly convex case
Probability Theory and Related Fields (2008) Vol. 140, pp 19-40.
- [A6] J.-F. COLLET, F. MALRIEU
Logarithmic Sobolev Inequalities for Non-homogeneous Markov Semigroups
ESAIM Probability and Statistics (2008) Vol. 12, pp 492-504

- [A7] B. JOURDAIN, F. MALRIEU
Propagation of chaos and Poincaré inequalities for a system of particles interacting through their cdf
 Annals of Applied Probability (2008) Vol. 18, No. 5, pp 1706–1736
- [A8] D. CHAFAÏ, F. MALRIEU
On fine properties of mixtures with respect to concentration of measure and Sobolev type inequalities
 Annales de l’Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques (2010) Vol. 46, No 1, pp 72-96
- [A9] D. CHAFAÏ, F. MALRIEU, K. PAROUX
On the long time behavior of the TCP window size process
 Stochastic Processes and their Applications (2010) Vol. 120, No. 8, pp 1518-1534
- [A10] J.-B. BARDET, H. GUÉRIN, F. MALRIEU
Long time behavior of diffusions with Markov switching
 ALEA (2010) Vol. 7, pp 151-170
- [A11] F. BOLLEY, A. GUILLIN, F. MALRIEU
Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck Equation
 ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis (2010) Vol. 44, no. 5, pp 867-884

Actes de colloques internationaux à comité de lecture

- [A12] D. TALAY, F. MALRIEU
Concentration inequalities for Euler schemes
 Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004, H. Niederreiter and D. Talay (Eds.), Springer-Verlag 2006, pp 355–371

Travaux soumis

- [A13] J. FONTBONA, H. GUÉRIN, F. MALRIEU
Quantitative estimates for the long time behavior of a PDMP describing the movement of bacteria
<http://arxiv.org/abs/1006.0982>

Travaux en cours d’achèvement

- [A14] S. LE BORGNE, F. MALRIEU
On the ergodicity of some modulated flows
- [A15] D. CHAFAÏ, T. LELIÈVRE, F. MALRIEU
Poincaré inequalities for symmetric measures

Introduction

Ce texte propose une synthèse de mes travaux de recherche depuis ma soutenance de thèse en décembre 2001. Je me suis principalement intéressé à l'étude quantitative de la dynamique en temps long de différents processus de Markov : diffusions, schémas d'Euler associés, processus déterministes par morceaux ...

Le fil conducteur du présent document est l'utilisation de techniques variées (inégalités fonctionnelles, couplage, etc) pour obtenir des estimations de convergence reliées aussi clairement que possible au générateur infinitésimal du processus étudié.

De nombreux travaux basés sur les idées fondatrices dues à Meyn et Tweedie (voir [MT09]) donnent dans un cadre général des résultats qualitatifs comme l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité invariante ou l'existence d'une vitesse de convergence à l'équilibre exponentielle (sans nécessairement fournir une estimation de cette vitesse en fonction des paramètres du processus).

Cependant, les processus intervenant dans les applications (nous verrons quelques exemples issus de la théorie cinétique des gaz, de la biologie ou de la modélisation du trafic Internet) possèdent souvent des propriétés de symétrie ou de régularité qui permettent de comprendre le mécanisme de convergence à l'équilibre. Nous verrons notamment comment construire des couplages explicites pour certains processus de saut.

Dans la présente introduction, nous résumons rapidement l'étude des processus de diffusion dits de Kolmogorov (dont le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est le représentant emblématique) pour lesquels de nombreux outils sont disponibles. Ces résultats sont bien connus mais leur présentation nous permettra de passer en revue l'essentiel des outils dont nous aurons besoin dans la suite. Le comportement « idéal » de ces processus nous servira aussi de référence pour jauger les résultats que nous obtiendrons pour des processus plus difficiles à étudier.

1.1 Processus de Kolmogorov

On retrouvera dans [Roy99] l'essentiel des résultats rappelés ci-dessous sur les processus de Kolmogorov. Soit V une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} à croissance polynomiale. Le processus de Kolmogorov $(X_t)_{t \geq 0}$ associé au potentiel V est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = X_0 + \sqrt{2}B_t - \int_0^t \nabla V(X_s) ds, \quad (1.1)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^d indépendant de X_0 . On supposera toujours dans la suite que l'une des deux conditions suffisantes de non explosion suivantes est satisfaite :

$$V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{et} \quad |\nabla V|^2 - \Delta V \text{ est borné inférieurement}$$

ou

$$\exists a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad x \cdot \nabla V(x) \geq a|x|^2 - b.$$

On notera $(P_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé. Il est défini pour toute fonction borélienne bornée par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_0 = x).$$

Son générateur infinitésimal est donné par

$$L f(x) = \Delta f(x) - \nabla V(x) \cdot \nabla f(x).$$

Le processus associé au potentiel $V(x) = |x|^2/2$ est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

La loi μ_0 de X_0 étant donnée, on peut montrer (voir [LSU68] théorème 8.1 p. 495) que pour tout $t > 0$ la loi de X_t admet une densité u_t de classe C^∞ strictement positive sur \mathbb{R}^d qui, de plus, est solution de l'équation aux dérivées partielles, dite de Fokker-Planck, suivante :

$$\partial_t u_t = \operatorname{div}(\nabla u_t + u_t \nabla V). \quad (1.2)$$

Si e^{-V} est intégrable, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ admet une unique mesure de probabilité invariante μ_∞ . Celle-ci possède une densité u_∞ par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$u_\infty(x) = \frac{1}{Z_\infty} e^{-V(x)} \quad \text{avec} \quad Z_\infty = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)} dx.$$

Remarquons de plus que L et P_t sont auto-adjoints dans $L^2(\mu_\infty)$; on dit que le processus est réversible pour la mesure μ_∞ . On peut analyser le comportement de la solution u_t au cours du temps en considérant l'entropie relative de u_t par rapport à u_∞ :

$$H(u_t | u_\infty) = \int u_t \log \frac{u_t}{u_\infty}.$$

En remarquant que l'équation de Fokker-Planck (1.2) s'écrit encore

$$\partial_t u_t = \operatorname{div}(u_t \nabla(\log u_t + V)),$$

une intégration par partie assure que

$$\frac{d}{dt} H(u_t | u_\infty) = - \int u_t |\nabla(\log u_t + V)|^2.$$

Ainsi, tant que u_t est différente de u_∞ , l'entropie relative décroît strictement. Quantifier cette décroissance requiert une hypothèse supplémentaire sur le potentiel V .

1.2 Quelques inégalités fonctionnelles classiques

L'outil permettant de conclure est appelée *inégalité de Sobolev logarithmique*.

Définition 1.2.1. Une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c si, pour toute fonction f suffisamment régulière,

$$\operatorname{Ent}_\mu(f^2) \leq c \int |\nabla f|^2 d\mu,$$

où

$$\operatorname{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu.$$

On notera $C_G(\mu)$ la plus petite constante qui convienne¹.

1. Le G est pour Gross qui établit le premier le lien entre la propriété d'hypercontractivité d'un semi-groupe et l'inégalité de Sobolev logarithmique pour sa mesure invariante (voir [Gro75]).

En supposant que μ_∞ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c , on obtient (en choisissant $f^2 = u_t/u_\infty$) que

$$H(u_t|u_\infty) \leq \frac{c}{4} \int u_t |\nabla(\log u_t + V)|^2,$$

ce qui fournit la borne

$$H(u_t|u_\infty) = H(u_0|u_\infty)e^{-4t/c}.$$

La question est alors d'obtenir un critère pour qu'une mesure vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique. Le critère le plus efficace, dû à Bakry et Émery, s'exprime en fonction de la convexité du potentiel V .

Théorème 1.2.2 (Bakry-Émery [BE85]). *S'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\text{Hess } V(x) \geq \lambda I_d \tag{1.3}$$

au sens des matrices symétriques, alors μ_∞ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $2/\lambda$.

Ce résultat est optimal pour les mesures gaussiennes standards et se généralise à des processus de diffusion sur des variétés riemanniennes (voir [BE85, Bak94]). De plus, la mesure sur \mathbb{R} de densité $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-c|x|^\alpha}$ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique si et seulement si $\alpha \geq 2$. L'inégalité de Sobolev logarithmique est stable par perturbation bornée du potentiel et par tensorisation (voir [L1]). De nombreuses autres inégalités fonctionnelles existent qui fournissent également des estimations pour la convergence en temps long du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ ou des propriétés sur la mesure μ . La plus classique est l'inégalité de Poincaré.

Définition 1.2.3. Une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d vérifie une inégalité de Poincaré de constante c si, pour toute fonction f suffisamment régulière,

$$\text{Var}_\mu(f) \leq c \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

On notera $C_P(\mu)$ la plus petite constante qui convienne.

Si μ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c alors elle vérifie aussi une inégalité de Poincaré de constante $c/2$. De plus, la mesure de densité $x \mapsto e^{-c|x|^\alpha}$ vérifie une inégalité de Poincaré si et seulement si $\alpha \geq 1$. On trouvera dans [GGM05, BCR06, GGM07, Gen08] des inégalités fonctionnelles interpolant entre ces deux cas d'école.

Remarque 1.2.4. *Si le support de μ n'est pas connexe, alors on peut trouver des fonctions dont le gradient est nul μ -presque sûrement et la variance sous μ n'est pas nulle : par suite μ ne peut vérifier d'inégalité de Poincaré (ni bien sûr d'inégalité de Sobolev logarithmique). Considérons par exemple la mesure sur \mathbb{R} de densité*

$$\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[2,3]}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Il existe des fonctions test f régulières de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont le gradient est nul μ -presque sûrement mais dont la variance est strictement positive : il suffit de choisir f constante égale à 1 sur $[0, 1]$, nulle sur $[2, 3]$ et régulière ailleurs. Cette observation assure que la mesure μ ne peut satisfaire une inégalité de Poincaré.

1.3 Distances de Wasserstein et couplage

Une autre façon d'obtenir des bornes quantitatives pour le comportement en temps long d'un processus de diffusion est d'utiliser un argument de couplage pour les distances de Wasserstein ou la norme en variation totale. On pourra consulter l'ouvrage de synthèse [Vil03] pour les propriétés classiques de ces distances.

Définition 1.3.1. Notons $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d et, pour $p \geq 1$,

$$\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \mu(dx) < +\infty \right\}.$$

On munit \mathcal{P} de la distance en variation totale

$$\|\mu - \nu\|_{\text{VT}} = \inf \{ \mathbb{P}(X \neq Y) ; X \sim \mu, Y \sim \nu \},$$

et $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ de la distance de Wasserstein d'ordre p

$$W_p(\mu, \nu) = \inf \left\{ \mathbb{E}(|X - Y|^p)^{1/p} ; X \sim \mu, Y \sim \nu \right\},$$

Soit $p \geq 1$ et μ_0 et ν_0 deux éléments de $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Notons μ_t (resp. ν_t) la loi de X_t solution de (1.1) lorsque X_0 est distribué selon μ_0 (resp. ν_0). Sous la condition (1.3), on peut montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$W_p(\mu_t, \nu_t) \leq e^{-\lambda t} W_p(\mu_0, \nu_0).$$

Le couplage est ici trivial : il s'agit de diriger les deux processus issus de conditions initiales différentes par le même mouvement brownien. Obtenir un résultat en variation totale demande plus d'astuce (au moins lorsque la dimension de l'espace d est supérieure à 2). Dans ce cas, pour faire en sorte que les processus se collent, il faut utiliser finement le théorème de Girsanov. Cette méthode est toutefois extrêmement puissante et fournit des résultats très forts même pour des équations différentielles stochastiques en dimension infinie très dégénérées (voir par exemple [Hai05]).

En toute généralité la distance en variation totale est majorée par la racine carrée de l'entropie relative : c'est l'inégalité dite de Csiszár-Kullback-Pinsker (voir [Pin64]). Un analogue existe pour la distance W_2 , introduit par Talagrand (voir [Tal96a]).

Définition 1.3.2. On dit qu'une mesure de probabilité μ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ vérifie une *inégalité de transport* T_2 de constante c si, pour toute mesure $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$W_2(\nu, \mu) \leq \sqrt{cH(\nu|\mu)}.$$

Contrairement à l'inégalité de Csiszár-Kullback-Pinsker, celle-ci n'est pas satisfaite en général.

Théorème 1.3.3 ([OV00, BGL01]). *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d qui vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c . Alors elle vérifie une inégalité de transport T_2 de constante $c/2$.*

Remarquons que ce théorème possède une réciproque sous la condition supplémentaire que μ soit de la forme $e^{-V} dx$ avec $\text{Hess } V \geq \lambda I_d$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ (voir [OV00, BGL01]).

Chercher des estimations en distance de Wasserstein est donc essentiellement payant lorsque l'inégalité de Sobolev logarithmique est en défaut. Heureusement, ceci arrive bien souvent!!!

1.4 Concentration de la mesure

Une autre propriété que nous chercherons à établir dans différents contextes est le *phénomène de concentration gaussienne*. Précisons rapidement ce que signifie ce terme. Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne si

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 1.$$

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d admettant un moment d'ordre 1. On associe à μ sa fonction de concentration $\alpha_\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\alpha_\mu(\lambda) = \log \sup_{\|f\|_{\text{Lip}} \leq 1} \mathbb{E}_\mu \left(e^{\lambda(f - \mathbf{E}_\mu f)} \right). \quad (1.4)$$

L'inégalité de Cramér-Chernov-Chebychev assure que, pour tout $r \geq 0$,

$$\beta_\mu(r) = \sup_{\|f\|_{\text{Lip}} \leq 1} \mu(|f - \mathbf{E}_\mu f| \geq r) \leq 2 \exp \left(\sup_{\lambda > 0} (r\lambda - \alpha_\mu(\lambda)) \right). \quad (1.5)$$

Nous dirons que la mesure μ vérifie la propriété de concentration gaussienne s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_\mu(\lambda) \leq c\lambda^2$. Dans ce cas, on a, pour tout $r \geq 0$,

$$\beta_\mu(r) \leq 2e^{-r^2/(4c)}.$$

Plus généralement, toute borne supérieure sur α_μ en fournit une pour β_μ . Comme l'établit [BG99], la propriété de concentration gaussienne est équivalente à une inégalité de transport T_1 (on remplace la distance W_2 par W_1). On peut également obtenir à partir d'inégalités de transport une propriété de concentration gaussienne stable par tensorisation *i.e.* par passage à la mesure produit (voir [Goz09]). On trouvera dans [Led01, Led99] une synthèse des résultats importants sur le phénomène de concentration et ses liens avec les autres inégalités fonctionnelles.

1.5 Plan de la synthèse

Le chapitre 2 propose plusieurs variations sur le thème de l'équation dite de McKean-Vlasov. Cette équation aux dérivées partielles issue de la théorie cinétique des gaz fait intervenir une non-linéarité non-locale au travers d'une convolution. Elle peut être vue comme une généralisation de l'équation de Fokker-Planck (1.2). J'avais commencé à étudier cette équation au cours de ma thèse mais encore maintenant de nombreuses questions restent ouvertes...

Dans le chapitre 3, les inégalités fonctionnelles sont utilisées pour étudier le schéma d'Euler (qui intervient dans la simulation des processus de diffusion), quelques processus de diffusions inhomogènes (c'est-à-dire dont l'évolution infinitésimale dépend du temps) et les mesures de probabilité construites comme des mélanges. Certains résultats totalement surprenants et contre-intuitifs apparaissent dans ce contexte.

Lorsque l'on s'intéresse à la convergence quantitative à l'équilibre pour des processus de Markov qui ne sont plus des diffusions, les choses se compliquent : par exemple, l'existence et la régularité de la densité de la loi au temps t ou de la mesure invariante, ainsi que les inégalités fonctionnelles sont plus difficiles à obtenir. De nombreux résultats sont disponibles dans des cas particuliers importants comme les processus de naissance et de mort par exemple ([JO10, CDPP09, Che]). Le chapitre 4 est consacré à l'étude de certains exemples de processus de Markov déterministes par morceaux. Ils ont été introduits par Davis dans [Dav84]. Les trajectoires de

ces processus évoluent de manière déterministe entre les sauts. Tout leur aléa est contenu dans le mécanisme de saut : horloge et mesure de saut. Des résultats qualitatifs existent (voir [CD08] ou [Las04] par exemple) basés sur les techniques à la « Meyn et Tweedie ». Cependant, très peu d'outils permettent d'étudier le comportement quantitatif de ces processus dans une généralité satisfaisante. Nous présenterons plusieurs exemples issus des applications pour lesquels on peut construire des couplages explicites en variation totale ou en distance de Wasserstein selon les cas.

Chapitre 2

Équations de McKean-Vlasov

Ce chapitre est consacré à l'étude probabiliste d'équations aux dérivées partielles de type McKean-Vlasov. Nous nous focaliserons essentiellement sur le comportement en temps long de leur solution (et non sur des questions, bien entendu intéressantes d'existence, d'unicité ou de régularité de ces solutions). Ces équations peuvent être vues comme un modèle simplifié de l'équation de Boltzmann qui décrit l'évolution de la densité de particules gazeuses en interaction. On trouvera dans [BCP97, BCCP98] une interprétation de certaines de ces équations comme comportement limite (sous une asymptotique bien choisie) de la répartition des vitesses de particules subissant des chocs inélastiques.

Considérons deux fonctions régulières V et W de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} (avec $d \geq 1$). L'équation de McKean-Vlasov associée est la suivante :

$$\partial_t u_t = \Delta u_t + \operatorname{div}(u_t(\nabla V + \nabla W * u_t)), \quad (2.1)$$

où la fonction u définie sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ est donnée à l'instant initial et la notation $*$ désigne l'opérateur de convolution sur la variable d'espace. Lorsque W est nul, l'équation (2.1) se réduit à l'équation de Fokker-Planck (1.2). De manière générale, W modélise une interaction entre particules identiques ; elle sera donc toujours supposée paire. La présence de cette interaction W rend l'équation aux dérivées partielles fortement non linéaire dans la mesure où les coefficients de cette équation dépendent de la solution dans l'ensemble de l'espace. On parle de non-linéarité non locale.

L'interprétation probabiliste de l'équation (2.1) consiste à montrer l'existence d'un processus $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , construit à partir d'un mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbb{R}^d , solution de

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla V(\bar{X}_t) dt - \nabla W * \mu_t(\bar{X}_t) dt, \\ \mathcal{L}(\bar{X}_t) = \mu_t, \end{cases} \quad (2.2)$$

où μ_0 est une mesure de probabilité donnée. Cette équation différentielle stochastique est dite non-linéaire dans la mesure où la loi de \bar{X}_t intervient dans ses coefficients. Comme on peut s'y attendre, on montre que μ_t est solution (au moins au sens faible) de (2.1). Insistons sur le fait que le couple $(\bar{X}_t, \mu_t)_{t \geq 0}$ est markovien (sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$) tandis que $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ ne l'est pas.

On associe à cette équation la fonctionnelle d'énergie libre (variante de l'entropie relative) définie de la façon suivante :

$$\eta(u) = \int u \log u + \int V u + \frac{1}{2} \iint W(x-y) u(x) u(y) dx dy. \quad (2.3)$$

Remarquons que l'on peut encore écrire l'équation (2.1) sous la forme

$$\partial_t u_t = \nabla \cdot (u_t \nabla (\log u_t + V + W * u_t)).$$

En notant $h : t \geq 0 \mapsto \eta(u_t)$ où u_t est solution de l'équation (2.1), on a

$$h'(t) = - \int |\nabla(\log u_t + V + W * u_t)|^2 u_t.$$

L'énergie libre est donc décroissante le long de l'équation de McKean-Vlasov et les éventuelles mesures de probabilité invariantes μ_∞ associées à (2.1) vérifient la relation implicite suivante :

$$\mu_\infty(dx) = \frac{1}{Z_\infty} e^{-V(x) - W * \mu_\infty(x)} dx \quad \text{où} \quad Z_\infty = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x) - W * \mu_\infty(x)} dx. \quad (2.4)$$

La non-linéarité de l'évolution fait que l'ensemble des mesures de probabilité invariantes n'est pas nécessairement convexe. Dans le cas où W est convexe mais V est un double puits (comme par exemple la fonction $x \mapsto x^4 - x^2$), les travaux [Daw83, HT10, HTb, HTa] montrent notamment qu'il peut y avoir exactement trois mesures invariantes. Toutefois, si les fonctions V et W vérifient

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \text{Hess}(V(x) + W(x)) \geq \lambda I_d \quad (2.5)$$

avec $\lambda > 0$ alors la fonctionnelle d'énergie libre donnée en (2.3) est strictement convexe et (2.1) admet une unique mesure invariante. Dans la suite, nous nous placerons sous des hypothèses assurant l'unicité de la mesure invariante.

Outre l'existence et l'unicité des solutions stationnaires, on peut également étudier la convergence à l'équilibre lorsque la condition initiale n'est pas stationnaire. Certains travaux (voir par exemple [Tam84]) donnent dans le cadre général (sans supposer l'unicité de la mesure invariante) des vitesses de convergence à l'équilibre exponentielles au voisinage des minima de la fonctionnelle d'énergie libre sous réserve de sa stricte convexité locale. Néanmoins ces travaux ne fournissent pas de borne explicite sur la vitesse ni d'informations sur la taille du voisinage sur lequel l'estimation est valable.

Le dernier protagoniste de la pièce est le système de particules en interaction. Soit $(X_0^i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_0 indépendante d'une suite $(B^i)_{i \geq 1}$ de mouvements browniens standards indépendants sur \mathbb{R}^d . On considère le processus stochastique $X^{(N)} = (X^{(1,N)}, X^{(2,N)}, \dots, X^{(N,N)})$ à valeurs dans \mathbb{R}^{dN} solution de

$$\begin{cases} dX_t^{(i,N)} = \sqrt{2} dB_t^i - \nabla V(X_t^{(i,N)}) dt - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla W(X_t^{(i,N)} - X_t^{(j,N)}) dt, \\ X_0^{(i,N)} = X_0^i. \end{cases} \quad (2.6)$$

Ce système à N particules en interaction est plus « classique » que le processus non linéaire $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ solution de (2.2) mais il vit en grande dimension. Chaque particule interagit non pas avec sa loi mais avec la mesure empirique Π_t^N du système à N particules au temps t donnée par

$$\Pi_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{(i,N)}}.$$

Les questions qui se posent alors sont les suivantes :

- quel est le comportement en temps long de μ_t vue comme solution de l'équation (2.1) ou comme loi du processus solution de (2.2) ?
- quel est le comportement en temps long de la loi de X_t^N ? de Π_t^N ? dépendent-ils de N ?
- peut-on comparer la loi des processus $(X_t^{(1,N)})_{t \geq 0}$ et $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$?

Une façon de tenter de répondre à la dernière question consiste à coupler le système à N particules en interaction avec N processus non linéaires indépendants issus des mêmes N conditions initiales et dirigés par les mêmes N mouvements browniens indépendants. On peut alors espérer faire coup double en montrant que la loi d'une particule parmi N ressemble à celle d'une particule non linéaire et que k particules parmi N sont asymptotiquement indépendantes lorsque N tend vers l'infini. C'est le phénomène de propagation du chaos (voir l'excellent cours de Saint-Flour [Szn91] de Sznitman sur le sujet).

Remarque 2.0.1. *Ces modèles appartiennent à l'immense classe des systèmes de particules en interaction de type champ moyen. Une autre famille importante dans cette classe est celle des systèmes de type Moran ou Nambu. Ils interviennent en filtrage non linéaire ou dans l'étude d'opérateurs de Schrödinger (voir [DM04]). Les propriétés de ces processus ont été beaucoup étudiées (stabilité, propagation du chaos uniforme en temps, concentration de la mesure,...). Citons notamment dans ce contexte [DM04], [DMG99], [DMM00], [DMR10] ou [Rou06].*

La section suivante présente la situation idéale que l'on pourrait qualifier d'uniformément convexe où toutes les réponses ci-dessous reçoivent une réponse positive. Dans les trois sections suivantes, différentes généralisations motivées par les applications sont étudiées. Nous verrons qu'alors, les choses se compliquent...

2.1 Un monde idéal... ou presque

Cette section est dédiée, en forme d'introduction, au cas d'école où tout se passe bien. Elle est basée (outre les références données dans la suite) sur des résultats détaillés dans [A1], [A2] et [A4] obtenus durant ma thèse.

Théorème 2.1.1. *On suppose que V et W vérifient la condition suivante :*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \text{Hess } V(x) \geq \lambda I_d \quad \text{avec } \lambda > 0 \text{ et } W \text{ est convexe.} \quad (2.7)$$

Alors la loi du système de particules de taille N vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $2/\lambda$. En particulier, pour tout $N \geq 1$, si μ_0^N est une mesure sur \mathbb{R}^{dN} absolument continue par rapport à μ_∞^N et μ_t^N désigne la loi du système de particules au temps t issu de μ_0^N alors,

$$\text{Ent}(\mu_t^N | \mu_\infty^N) \leq \text{Ent}(\mu_0^N | \mu_\infty^N) e^{-\lambda t},$$

pour tout $t \geq 0$.

De plus, si μ_0 admet un moment d'ordre 2, il existe une constante C ne dépendant que du second moment de μ_0 telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left(\left| X_t^{(1,N)} - \bar{X}_t^1 \right|^2 \right) \leq \frac{C}{N},$$

où $(\bar{X}_t^1)_{t \geq 1}$ est le processus non linéaire solution de l'équation (2.2) dirigé par le même mouvement brownien $(B_t^1)_{t \geq 1}$ que la particule $X^{(1,N)}$ et tel que $\bar{X}_0^1 = X_0^{(1,N)}$.

Enfin, il existe une constante c telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_t^{(i,N)}) - \int f d\mu_\infty \right| \geq r + \frac{c}{\sqrt{N}} + ce^{-\lambda t} \right) \leq 2e^{-N\lambda r^2/2}, \quad (2.8)$$

pour tous $t \geq 0$ et $r \geq 0$ où μ_∞ est l'unique solution de (2.4).

Ce résultat complète celui obtenu par Carrillo, McCann et Villani dans [CMCV03] qui donne une vitesse de convergence à l'équilibre pour l'équation non linéaire (2.1) en terme d'énergie libre.

Théorème 2.1.2 ([CMCV03]). *Sous l'hypothèse (2.7), si u_t est la solution au temps t de l'équation non linéaire (2.1) au temps t de condition initiale u_0 , alors, pour tout $t \geq 0$,*

$$\eta(u_t) - \eta(u_\infty) \leq (\eta(u_0) - \eta(u_\infty))e^{-\lambda t}.$$

Remarque 2.1.3. *Les théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 sont encore vrais si l'on remplace l'hypothèse de convexité de W par la condition*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \text{Hess } W(x) \leq \lambda' I_d \quad \text{avec } \lambda' < \lambda$$

à condition de remplacer dans les estimations λ par $\lambda - \lambda'$.

Le théorème 2.1.2 reste essentiellement vrai si l'on suppose que V est nul et que (2.5) est satisfaite. Il faut juste remarquer que dans ce cas l'ensemble des mesures invariantes associées à l'équation non linéaire (2.1) n'est plus réduit à un singleton mais est paramétré par l'espérance. De plus, l'évolution le long de l'équation (2.1) se fait à espérance (ou centre de masse) fixée. La solution u_t converge en énergie libre à vitesse $e^{-\lambda t}$ vers la mesure invariante de même moyenne.

Le théorème 2.1.1 lui ne peut être vrai en l'état sous l'hypothèse $V = 0$ puisque la parité de W assure que la moyenne empirique du système de particules de taille N (qui n'est autre que l'espérance de la mesure empirique) vaut

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^{(i,N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_0^{(i,N)} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_t^i \quad (2.9)$$

est ne converge pas dans L^2 lorsque t tend vers l'infini. Cette situation avait été étudiée par Benachour, Roynette, Talay et Valois dans [BRTV98, BRV98] dans le cas unidimensionnel. Les auteurs obtiennent notamment une propagation du chaos avec une constante dépendant du temps. Pour retrouver l'analogie du théorème 2.1.1, il faut modifier légèrement le système de particules de manière à ce que sa mesure empirique vérifie la condition de moyenne nulle (ou plus généralement constante). Ceci est possible en projetant le système sur l'hyperplan H_N orthogonal au vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ c'est-à-dire en considérant le système $Y^{(N)}$ donné par

$$Y^{(i,N)} = X^{(i,N)} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X^{(j,N)}. \quad (2.10)$$

Il se trouve que $Y^{(N)}$ est encore une diffusion sur H_N qui se comporte comme $X^{(N)}$ dans le théorème 2.1.1.

Pour conclure citons deux améliorations importantes de la borne (2.8). Bolley, Guillin et Villani montrent dans [BGV07] que l'on peut obtenir une concentration gaussienne pour $W_1(\Pi_t^{(N)}, u_t)$ (ce qui revient à faire entrer le supremum sur les fonctions 1-lipschitziennes dans la probabilité). Bolley fournit dans [Bol10] le même type de concentration mais pour les trajectoires sur un intervalle de temps borné $[0, T]$. Le prix à payer pour ces généralisations importantes est une constante de concentration peu explicite et énorme...

2.2 Interaction convexe dégénérée

Supposons toujours que le potentiel de confinement V soit nul et que la fonction W soit convexe et paire. On souhaite affaiblir l'hypothèse (2.9) afin de pouvoir prendre en compte

le modèle physique de l'équation des milieux granulaires introduit par [BCP97] pour lequel $W(x) = |x|^4$ (et $d = 1$). Les résultats ci-dessous sont tirés du travail en collaboration avec Patrick Cattiaux et Arnaud Guillin [A5].

On peut établir un résultat de propagation du chaos uniforme en temps mais la vitesse de convergence est détériorée (au moins dans notre estimation).

Théorème 2.2.1. *On suppose que V est nulle, que W est paire et qu'il existe $A, \alpha > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (x - y) \cdot (\nabla W(x) - \nabla W(y)) \geq A\varepsilon^\alpha (|x - y|^2 - \varepsilon^2). \quad (2.11)$$

Si la loi μ_0 possède un moment polynomial assez grand alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left(|Y_t^{i,N} - \bar{X}_t^i|^2 \right) \leq \frac{K}{N^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad (2.12)$$

où $Y_t^{i,N}$ est défini par (2.10) et $(\bar{Y}_t^1)_{t \geq 1}$ est le processus non linéaire solution de l'équation (2.2) dirigé par le même mouvement brownien $(B_t^1)_{t \geq 1}$ que la particule $X^{(1,N)}$.

Remarque 2.2.2. *La condition (2.11) peut sembler obscure. On peut remarquer qu'elle est satisfaite en particulier pour la fonction $x \mapsto |x|^{2+\alpha}$.*

Le système de particules est un processus de Kolmogorov associé à un potentiel convexe dont la hessienne est dégénérée. Le critère de Bakry-Émery (1.3) ne s'applique pas. Un argument de perturbation fournit une inégalité de Sobolev logarithmique mais la constante dépend *a priori* de la taille N du système. Il faut donc s'y prendre autrement pour obtenir des bornes quantitatives satisfaisantes quand N tend vers l'infini. La stratégie alternative consiste à étudier la convergence à l'équilibre au sens, plus faible, de la distance de Wasserstein d'ordre 2.

Théorème 2.2.3. *Soient u_t (resp. v_t) la solution de l'équation (2.1) de condition initiale u_0 (resp. v_0) ayant un moment polynomial assez grand pour assurer ses existence et unicité.*

Alors la fonction $t \mapsto W_2(u_t, v_t)$ est décroissante et, pour tout $t \geq 0$, on a

$$W_2(u_t, v_t) \leq \left(W_2^{-\alpha}(u_0, v_0) + A (\alpha/(2 + \alpha))^{1+\alpha/2} t \right)^{-1/\alpha}.$$

Ce résultat peut être obtenu en travaillant directement sur l'équation non linéaire (2.1) (voir [CMCV03, CMCV06]) mais cette approche requiert une artillerie assez sophistiquée. Notre méthode consiste à montrer le résultat de contraction pour le système de particules (en s'appuyant essentiellement sur un lemme de Gronwall astucieux) puis à le transférer au processus non linéaire grâce au résultat de propagation du chaos uniforme en temps. Notons qu'ici la dégradation de la vitesse de convergence dans la propagation du chaos n'a aucune influence.

Ajoutons pour conclure que l'on peut aussi établir une inégalité de transport T_2 pour la loi du système de particules au temps t avec une constante uniforme en temps et en la taille du système de particules. Ceci fournit également une inégalité de concentration gaussienne comme dans le cas uniformément convexe.

2.3 Interaction via la fonction de répartition

On se place toujours sous la condition V nul mais cette fois-ci, c'est la stricte convexité à l'infini que l'on va supprimer. En quelque sorte, il s'agit d'étudier l'analogue non linéaire du processus

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \text{sgn}(X_t) dt$$

qui admet pour mesure invariante la loi de Laplace de densité $x \mapsto e^{-|x|}/2$. Les résultats de cette section sont tirés du travail [A7] écrit en collaboration avec Benjamin Jourdain.

Remarquons en préambule qu'une inégalité de type Sobolev logarithmique ne peut être satisfaite dans ce contexte puisque la mesure invariante a des queues exponentielles. Nous établirons plutôt des inégalités de type Poincaré mais il nous faudra pour cela procéder sans utiliser le critère de Bakry-Émery qui n'est pas non plus vérifié ici (voir l'introduction). De plus, le résultat de propagation du chaos ne sera plus uniforme en temps.

On s'intéresse à l'équation de conservation scalaire visqueuse de fonction de flux $-A$ supposée de classe \mathcal{C}^1 :

$$\partial_t F_t(x) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} F_t(x) + \partial_x (A(F_t(x))), \quad F_0(x) = H * m(x). \quad (2.13)$$

où m est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} et $H : x \mapsto \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$ est la fonction de Heaviside. Pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} , la fonction $H * \mu$ est la fonction de répartition de la mesure μ . Puisque A n'apparaît dans cette équation qu'au travers de sa dérivée, nous supposons sans perte de généralité que $A(0) = 0$. On associe à cette équation, comme dans [Jou00], le processus non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t A'(H * P_s(\bar{X}_s)) ds, \\ \forall t \geq 0, \quad \mathcal{L}(\bar{X}_t) = P_t, \end{cases} \quad (2.14)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur \mathbb{R} indépendant d'une variable aléatoire X_0 de loi m et σ est une constante strictement positive. D'après [Jou00], cette équation différentielle stochastique non linéaire admet une unique solution faible. De plus, $H * P_t(x)$ est l'unique solution faible bornée de (2.13). Pour $t > 0$, en vertu du théorème de Girsanov, P_t admet une densité p_t par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Introduisons le système de particules de taille N associé au processus non linéaire solution de (2.14). Le coefficient de dérive de la particule i parmi N ne dépend que du rang de la particule :

$$X_t^{(i,N)} = X_0^i + \sigma B_t^i - \int_0^t a_N \left(\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{X_s^{(j,N)} \leq X_s^{(i,N)}\}} \right) ds, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.15)$$

où $(B^i)_{i \geq 1}$ sont des mouvements browniens standards indépendants et indépendants de la suite $(X_0^i)_{i \geq 1}$ de conditions initiales indépendantes de loi m . Les coefficients $(a_N(i))_{1 \leq i \leq N}$ sont choisis de la forme suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad a_N(i) = N \left(A \left(\frac{i}{N} \right) - A \left(\frac{i-1}{N} \right) \right). \quad (2.16)$$

Le coefficient $a_N(i)$ est une approximation $A'(\frac{i}{N})$.

Remarque 2.3.1. *Ce choix pour $a_N(i)$ est préférable à celui fait dans [Jou00] : $A'(i/N)$. En effet, la somme $\sum_{i=1}^N a_N(i)$ intervient dans le comportement en temps long du système de particules. Dans notre cas, elle est tout simplement égale à $nA(1)$. On pourrait obtenir un résultat de propagation du chaos trajectorielle similaire au théorème 2.3.3 ci-dessous avec le choix $a_N(i) = A'(i/N)$.*

Remarque 2.3.2. *Plusieurs travaux [PP08, CP, CP10] étudient ces systèmes de particules interagissant via leurs rangs.*

Pour tout $i \geq 1$, l'équation différentielle stochastique non linéaire suivante

$$\begin{cases} \bar{X}_t^i = X_0^i + \sigma B_t^i - \int_0^t A'(H * P_s(\bar{X}_s^i)) ds, \\ \forall t \geq 0, \quad \mathcal{L}(\bar{X}_t^i) = P_t. \end{cases} \quad (2.17)$$

admet une unique solution et, pour tout $t \geq 0$, la loi P_t de \bar{X}_t^i ne dépend pas de i .

Théorème 2.3.3. *Si $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et A' est lipschitzienne continue de constante K alors, pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{(i, N)} - \bar{X}_s^i|^2 \right) \leq \frac{K^2 t^2}{6N}.$$

On peut montrer que l'équation non linéaire possède des mesures de probabilité invariantes si $A(1) = 0$ et $A(u) < 0$ pour tout $u \in (0, 1)$. Sous cette condition, toutes les mesures invariantes sont des translatées de la mesure admettant pour densité la fonction f de classe \mathcal{C}^1 qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{2}{\sigma^2} A(H * f(x)) \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{2}{\sigma^2} A'(H * f(x)) f(x). \quad (2.18)$$

Si de plus, $A'(0) < 0$ et $A'(1) > 0$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{-\infty}{\sim} -\frac{2A'(0)}{\sigma^2} \int_{-\infty}^x f(y) dy & \text{et} & \quad \int_0^x \frac{dy}{f(y)} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-\sigma^2}{2A'(0)f(x)}, \\ f(x) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2A'(1)}{\sigma^2} \int_x^{+\infty} f(y) dy & \text{et} & \quad \int_0^x \frac{dy}{f(y)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sigma^2}{2A'(1)f(x)}. \end{aligned}$$

Ces calculs d'équivalents montrent que les mesures invariantes ont un moment d'ordre 1 et vérifient une inégalité de Poincaré en vertu du critère de Hardy (voir [L1] chap. 7).

Exemple 2.3.4. *Si la fonction A est égale à $x \mapsto x(x-1)/2$ alors la fonction de répartition F et la densité f sont données, à translation près, par*

$$F(x) = \frac{e^{x/\sigma^2}}{1 + e^{x/\sigma^2}} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{4\sigma^2 \text{ch}^2(x/2\sigma^2)};$$

Pour obtenir un résultat de convergence à l'équilibre quantitatif pour le processus non linéaire, il n'est pas possible d'utiliser une estimation sur le système de particules : l'absence de propagation du chaos uniforme en temps interdit le tranfert. Il faut donc travailler directement sur le processus non linéaire. Signalons que les résultats de [CMCV03] ne s'appliquent pas ici.

Théorème 2.3.5. *Supposons que A soit de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ et vérifie*

$$A(0) = A(1) = 0, \quad A'(0) < 0, \quad A'(1) > 0 \quad \text{et} \quad \forall u \in (0, 1), \quad A(u) < 0. \quad (\text{H})$$

Si la loi initiale a pour densité p_0 et admet un moment d'ordre 1, on note p_∞ la mesure invariante de même espérance que p_0 . Alors la fonction

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{(p_t(x) - p_\infty(x))^2}{p_\infty(x)} dx$$

tend vers 0 exponentiellement vite quand $t \rightarrow +\infty$ à condition que sa valeur initiale soit assez petite.

Intéressons-nous au comportement en temps long du système de particules. On peut expliciter la densité de sa mesure invariante. Par symétrie, elle est invariante par permutation des coordonnées et vérifie une inégalité de Poincaré de constante indépendante de N .

Théorème 2.3.6. *Supposons que la fonction A soit nulle en 1 et uniformément convexe sur $[0, 1]$ au sens où $A''(x) \geq \alpha > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors, la mesure de probabilité de densité*

$$p_\infty^N(y) = \frac{1}{Z_N} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_N^{(i)} y_{(i)}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathcal{M}_N est invariante pour le système de particules projeté où $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(N)}$ désigne le réordonnement croissant des coordonnées de $y = (y_1, \dots, y_N)$.

De plus, si la loi de $(Y_0^{(1,N)}, \dots, Y_0^{(N,N)})$ admet une densité symétrique $p_0^N(y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathcal{M}_N , alors il en est de même pour $(Y_t^{(1,N)}, \dots, Y_t^{(N,N)})$ à tout instant $t \geq 0$ et

$$\int_{\mathcal{M}_N} \left(\frac{p_t^N}{p_\infty^N}(x) - 1 \right)^2 p_\infty^N(x) dx \leq e^{-\lambda_N t} \int_{\mathcal{M}_N} \left(\frac{p_0^N}{p_\infty^N}(x) - 1 \right)^2 p_\infty^N(x) dx$$

où la suite $(\lambda_N)_{N \geq 1}$ est majorée par $\frac{\alpha^2}{12^3 \sigma^2}$.

2.4 Équation de Vlasov-Fokker-Planck

Le dernier exemple de généralisation consiste à étudier le comportement d'une équation aux dérivées partielles cinétique inhomogène, c'est-à-dire dans laquelle figurent position et vitesse. Les résultats présentés ici sont issus du travail [A11] en collaboration avec François Bolley et Arnaud Guillin.

On s'intéresse au comportement en temps long et à l'approximation particulière de la distribution $f_t(x, v)$ dans l'espace des positions $x \in \mathbb{R}^d$ et des vitesses $v \in \mathbb{R}^d$ (avec $d \geq 1$) solution de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$\partial_t f_t + v \cdot \nabla_x f_t - C *_x \rho[f_t](x) \cdot \nabla_v f_t = \Delta_v f_t + \operatorname{div}_v((A(v) + B(x))f_t), \quad (2.19)$$

où

$$\rho[f_t](x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_t(x, v) dv$$

est la densité macroscopique des positions $x \in \mathbb{R}^d$ (ou encore la marginale en espace de f_t). Ici $a \cdot b$ représente le produit scalaire de deux vecteurs a et b de \mathbb{R}^d et $*_x$ la convolution par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$:

$$C *_x \rho[f_t](x) = \int_{\mathbb{R}^d} C(x - y) \rho[f_t](y) dy = \int_{\mathbb{R}^{2d}} C(x - y) f_t(y, v) dy dv.$$

De plus, ∇_x est le gradient pour la variable de position $x \in \mathbb{R}^d$ tandis que ∇_v , div_v et Δ_v sont respectivement les gradient, divergence et laplacien pour la variable vitesse $v \in \mathbb{R}^d$.

On associe à l'équation aux dérivées partielles (2.19) le processus $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^{2d} solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= V_t dt \\ dV_t &= -A(V_t) dt - B(X_t) dt - C *_x \rho[f_t](X_t) dt + \sqrt{2} dW_t, \end{cases} \quad (2.20)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur \mathbb{R}^d et f_t est la loi de (X_t, V_t) sur \mathbb{R}^{2d} , et par suite $\rho[f_t]$ est la loi de X_t dans \mathbb{R}^d .

Obtenir des taux de convergence à l'équilibre pour ce processus est plus délicat que pour les modèles précédents. En effet, il présente plusieurs difficultés : tout d'abord, l'équation différentielle stochastique est dégénérée dans la mesure où la diffusion n'agit que sur la variable vitesse. De plus, le champs de vecteurs donné par la dérive de cette équation n'est pas dissipatif pour la norme euclidienne.

De nombreux travaux sont consacrés à l'équation sans interaction ($C = 0$) appelée équation cinétique de Fokker-Planck. Sur le versant probabiliste, l'adaptation de techniques basées sur

les fonctions de Lyapounov ont permis à Talay [Tal02], Wu [Wu01] ou encore Bakry, Guillin et Cattiaux [BCG08] d'établir des résultats de convergence à l'équilibre exponentiels ou sous-exponentiels (selon les cas) en variation totale. D'autre part, le cas $A(v) = v$ et $B(x) = \nabla\Psi(x)$ est étudié dans [DV01], [Hér07], [HN04] et [Vil09, Chapter 7] : en supposant que la mesure $e^{-\Psi}$ vérifie une inégalité de type Poincaré ou Sobolev logarithmique des estimations L^2 ou entropiques explicites sont obtenues.

L'approche de Villani (voir [Vil09, Chapitre 17]) fonctionne encore lorsque C dérive d'un potentiel borné : quitte à supposer que l'espace des positions est le tore \mathbb{T}^d (plutôt que \mathbb{R}^d muni d'un terme de confinement associée à B), il obtient, sous la condition que le potentiel soit assez petit, un taux de convergence exponentiel explicite vers la mesure invariante $(2\pi)^{-1/2}e^{-|v|^2/2}dx dv$.

Notre travail s'inspire de cette approche. Nous faisons ici les hypothèses suivantes sur les fonctions A , B et C :

Hypothèse 2.4.1. *On dit que l'hypothèse (A) est satisfaite s'il existe des constantes $\alpha, \alpha', \beta, \gamma$ et δ telles que*

$$\begin{aligned} |A(v) - A(w)| &\leq \alpha|v - w|, & (v - w) \cdot (A(v) - A(w)) &\geq \alpha'|v - w|^2, \\ B(x) &= \beta x + D(x) & \text{où } |D(x) - D(y)| &\leq \delta|x - y| \end{aligned}$$

et

$$|C(x) - C(y)| \leq \gamma|x - y|$$

pour tous x, y, v, w in \mathbb{R}^d .

Théorème 2.4.2. *Sous l'hypothèse (A), pour tous α, α' et β strictement positifs, il existe une constante c telle que, si $0 \leq \gamma, \delta < c$, il existe deux constantes C et C' telles que*

$$W_2(f_t, \bar{f}_t) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, \bar{f}_0), \quad t \geq 0 \quad (2.21)$$

pour toutes solutions-mesures $(f_t)_{t \geq 0}$ and $(\bar{f}_t)_{t \geq 0}$ à l'équation (2.19) de conditions initiales respectives f_0 et \bar{f}_0 dans \mathcal{P}_2 .

De plus, (2.19) admet une unique mesure stationnaire μ_∞ et toutes les solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ telles que $f_0 \in \mathcal{P}_2$ convergent vers elle avec

$$W_2(f_t, \mu_\infty) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, \mu_\infty), \quad t \geq 0.$$

Le système de particules de taille N associé à (2.19), à valeurs dans \mathbb{R}^{2dN} , est solution de

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = V_t^{i,N} dt \\ dV_t^{i,N} = -A(V_t^{i,N}) dt - B(X_t^{i,N}) dt - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C(X_t^{i,N} - X_t^{j,N}) dt + \sqrt{2} dW_t^i, \\ (X_0^{i,N}, V_0^{i,N}) = (X_0^i, V_0^i), \end{cases} \quad (2.22)$$

où les processus $(W^i)_{i \geq 1}$ sont des mouvements browniens standards indépendants sur \mathbb{R}^d et indépendants de la suite de variables aléatoires $(X_0^i, V_0^i)_{i \geq 1}$ de loi f_0 in \mathcal{P}_2 .

Soit $(\bar{X}_t, \bar{V}_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'équation

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = \bar{V}_t dt \\ d\bar{V}_t = -A(\bar{V}_t) dt - B(\bar{X}_t) dt - C *_{\nu_t} \rho[\nu_t](\bar{X}_t) dt + \sqrt{2} dW_t^1, \\ (\bar{X}_0, \bar{V}_0) = (X_0^1, V_0^1). \end{cases} \quad (2.23)$$

où ν_t est la loi de (\bar{X}_t, \bar{V}_t) .

Théorème 2.4.3. Soit $(X_0^i, V_0^i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi f_0 in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{2d})$. Soit $(X_t^{i,N}, V_t^{i,N})_{t \geq 0, 1 \leq i \leq N}$ la solution du système (2.20) et $(\bar{X}_t, \bar{V}_t)_{t \geq 0}$ la solution de (2.23) de loi initiale (X_0^1, V_0^1) . Sous l'hypothèse (A), pour tous α, α' et β il existe c tel que, si $0 \leq \gamma, \delta < c$, alors il existe C , indépendant de N , tel que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left(\left| X_t^{1,N} - \bar{X}_t \right|^2 + \left| V_t^{1,N} - \bar{V}_t \right|^2 \right) \leq \frac{C}{N}.$$

La constante C ne dépend que des coefficients de A , B et C et du deuxième moment de f_0 .

Remarque 2.4.4. En particulier, la loi $f_t^{(1,N)}$ du couple $(X_t^{1,N}, V_t^{1,N})$ converge vers la loi f_t du processus non linéaire (\bar{X}_t, \bar{V}_t) solution de (2.23) quand N tend vers l'infini puisque

$$W_2(f_t^{(1,N)}, f_t)^2 \leq \mathbb{E} \left(\left| X_t^{1,N} - \bar{X}_t \right|^2 + \left| V_t^{1,N} - \bar{V}_t \right|^2 \right) \leq \frac{C}{N}.$$

Théorème 2.4.5. Sous l'hypothèse (A), pour tous α, α' et β il existe une constante c telle que, si $0 \leq \gamma, \delta < c$, la loi du système de particules de taille N $(X_T^{(i,N)}, V_T^{(i,N)})$ au temps T , issu de $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, satisfait à une inégalité de transport T_2 de constante D indépendante de N, T et (x_0, v_0) .

En particulier, il existe D' telle que

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(X_T^{i,N}, V_T^{i,N}) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} h d\mu_\infty(h) \geq r + D' \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + e^{-CT} \right) \right) \leq \exp \left(-\frac{Nr^2}{2D} \right)$$

pour tous $N, T, r \geq 0$ et toute fonction 1-Lipschitzienne h sur \mathbb{R}^{2d} .

La constante C est celle du théorème 2.4.2 et D' ne dépend que du point (x_0, v_0) et des coefficients de l'équation.

Remarque 2.4.6. Dans le cas homogène (en espace) ce type de résultats est obtenu dans [A2]; ils sont améliorés dans [BGV07] et [Bol10] où une propriété de concentration pour la distance de Wasserstein entre la mesure empirique du système de particule et la loi du processus non linéaire est obtenue. Ce genre de résultats doit être vrai dans le contexte de cette section.

2.5 Ouvertures

Dans la série d'articles [HT10, HTb, HTa], Herrmann et Tugaut étudient le processus (2.2) dans le cas où l'interaction W est convexe et paire mais où le potentiel V a la forme d'un double puits, pair également. Ils montrent notamment que si le bruit est faible, il existe exactement trois mesures invariantes : l'une symétrique, les deux autres essentiellement concentrées dans chacun des puits (ils généralisent ce résultat à un potentiel V possédant plus de deux puits). Dans ce cas, on ne sait pas déterminer les bassins d'attraction de chacune des lois invariantes et on ne sait donner des vitesses de convergence explicites que dans certains cas particuliers (loi initiale symétrique et potentiel V peu convexe).

Un autre modèle proche de la dynamique de McKean-Vlasov est celui des diffusions auto-attractives étudiées notamment par Benaïm, Ledoux et Raimond dans [BLR02, BR03b, BR05, BR08] mais aussi par Kurtzmann et Klepstyn (voir [Kur10, KK]). Ce processus est défini comme solution de l'équation

$$Z_t = Z_0 + B_t - \frac{1}{t} \int_0^t \nabla W(Z_t - Z_s) ds.$$

Au lieu d'interagir avec sa loi au temps t , il interagit avec sa mesure d'occupation. Le fait remarquable est que les mesures invariantes de Z (lorsqu'elles existent) sont les mêmes que celles de \bar{X} solution de (2.2) (avec V nul).

Enfin, l'équation de Vlasov-Fokker-Planck permet de modéliser des interactions de type gravitationnelles. Dans ce cas le potentiel d'interaction est singulier et l'attraction est décroissante en la distance. Pour ce genre de coefficients, l'essentiel du travail reste à faire.

Chapitre 3

Inégalités fonctionnelles et applications

Ce chapitre regroupe plusieurs travaux sur les inégalités fonctionnelles dans des cadres un peu originaux. Nous nous intéresserons successivement au schéma d'Euler qui permet d'approcher la loi d'un processus de diffusion général, à des diffusions inhomogènes (*i.e.* dont les coefficients dépendent du temps) et à des mesures que l'on souhaite voir comme un mélange de lois.

3.1 Schémas d'Euler

La loi d'un processus de diffusion n'est en général pas explicite. On doit donc recourir à la simulation. La façon la plus simple d'approcher un processus de diffusion revient à discrétiser le temps puis à geler sur chaque pas de temps les coefficients de l'équation différentielle stochastique dont il est solution. C'est le fameux schéma d'Euler. De nombreux travaux sont consacrés à la convergence de ce schéma. Citons notamment les articles fondateurs [TT90, BT95] concernant l'erreur faible (l'écart entre les espérances pour des fonctions test) et un article de synthèse [Tal96b].

Dans cette section, nous montrons comment obtenir des inégalités fonctionnelles du type Poincaré ou Sobolev logarithmique pour la loi au temps t d'un schéma d'Euler. Ces inégalités permettent notamment d'obtenir des inégalités de concentration non asymptotiques pour la méthode de Monte-Carlo. On pourra se reporter à [A12] (écrit en collaboration avec Denis Talay) pour de plus amples développements. Signalons également un travail plus récent [LM09] dû à Lemaire et Menozzi qui établit des bornes (supérieure et inférieure) gaussiennes pour le schéma d'Euler sans utiliser l'inégalité de Sobolev logarithmique.

3.1.1 Inégalité de Poincaré pour une diffusion générale

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus de diffusion sur \mathbb{R}^d solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sqrt{2}\sigma(X_s) dB_s, \quad (3.1)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur \mathbb{R}^d , $x \mapsto \sigma(x)$ est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices de taille $d \times d$ et $x \mapsto b(x)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Le schéma d'Euler (explicite) $(X_n^\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ de pas $\gamma > 0$ associé à la diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$ est la chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{R}^d définie de la manière suivante :

$$X_{n+1}^\gamma := X_n^\gamma + b(X_n^\gamma)\gamma + \sqrt{2}\sigma(X_n^\gamma)(B_{(n+1)\gamma} - B_{n\gamma}). \quad (3.2)$$

Son noyau de transition s'écrit, pour toute fonction f mesurable bornée et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$K(f)(x) := \mathbb{E} \left[f \left(x + b(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)Y \right) \right],$$

où Y est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, I_d)$. La loi de X_n^γ vérifie une inégalité de Poincaré. Le schéma d'Euler est très intuitif, mais en plus, il fonctionne très bien comme le montre notamment le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 ([TT90]). *Supposons que les fonctions σ et b sont régulières. Alors*

$$\mathbb{E}f(X_n^{t/n}) - \mathbb{E}f(X_t) = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o(1/n^2).$$

Remarque 3.1.2. *On peut obtenir un développement limité de l'erreur à tout ordre. Il est également possible d'affaiblir les hypothèses de régularité grâce au calcul de Malliavin (voir [BT95]).*

Théorème 3.1.3. *Si σ et b sont des fonctions de classe \mathcal{C}_b^1 alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, la mesure $K^n(\cdot)(x)$ vérifie l'inégalité de Poincaré*

$$\text{Var}_\mu(f) \leq C_{\gamma,n} \int |\nabla f|^2 d\mu \quad \text{avec} \quad C_{\gamma,n} = \gamma c \frac{(C_\gamma)^n - 1}{C_\gamma - 1}, \quad (3.3)$$

où, en notant $\rho(A)$ le rayon spectral de A ,

$$\begin{aligned} c &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \rho(\sigma(x)\sigma^*(x)) \\ C_\gamma &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \rho[I_d + \gamma(\text{Jac } B(x) + \text{Jac } B^*(x)) + 2\gamma\sigma(x)\sigma^*(x)]. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.4. *La constante C_γ peut être choisie uniformément en $\gamma \leq \gamma_0$. De plus, $C_\gamma = 1 + c'\gamma + o(\gamma)$, ce qui assure en particulier que $\gamma/(C_\gamma - 1)$ est d'ordre 1 pour γ petit. Enfin, si $C_\gamma = 1$, alors $((C_\gamma)^n - 1)/(C_\gamma - 1)$ doit être remplacé par $c'n$.*

3.1.2 Inégalité de Sobolev logarithmique uniforme

On s'intéresse ici au cas où $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla V(X_t) dt \quad (3.4)$$

où V est une fonction convexe sur \mathbb{R}^d vérifiant le critère de Bakry-Émery (1.3). Puisque la fonction ∇V n'est pas nécessairement lipschitzienne, le schéma d'Euler peut ne pas converger. Il vaut mieux dans ce cas introduire sa version implicite :

$$\tilde{X}_{n+1}^\gamma = \tilde{X}_n^\gamma - \nabla V(\tilde{X}_{n+1}^\gamma)\gamma + \sqrt{2\gamma}Y,$$

où Y est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite sur \mathbb{R}^d . Posons

$$\varphi_\gamma(x) := (I + \gamma\nabla V(x))^{-1}(x).$$

Le noyau de transition \tilde{K} du schéma d'Euler implicite est donné par

$$\tilde{K}f(x) = \mathbb{E} \left[f \circ \varphi_\gamma \left(x + \sqrt{2\gamma}Y \right) \right].$$

Sous la condition (1.3), le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ associé à la diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de l'équation (3.4) vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique locale uniforme en temps : pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, la mesure $P_t(\cdot)(x)$ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $(2/\lambda)(1 - e^{-2\lambda t})$ (voir [Bak97]). Le théorème ci-dessous montre qu'il en est de même pour le schéma d'Euler implicite associé.

Théorème 3.1.5. *Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\text{Hess } V(x) \geq \lambda I_d \quad (3.5)$$

pour tous x dans \mathbb{R}^d . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, la mesure $\tilde{K}^n(\cdot)(x)$ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\text{Ent}_\mu(f^2) \leq \bar{D}_{\gamma,n} \int |\nabla f|^2 d\mu \quad \text{avec} \quad \bar{D}_{\gamma,n} = \frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)} \left(1 - \frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right). \quad (3.6)$$

C'est encore le cas pour la mesure invariante du schéma d'Euler.

Remarque 3.1.6. *Lorsque γ temps vers 0 et n tend vers l'infini de sorte que γn tende vers $t > 0$,*

$$\bar{D}_{\gamma,n} \rightarrow \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})$$

qui est la constante de Sobolev logarithmique donnée pour la loi de X_t^x par le critère de Bakry-Émery.

3.1.3 Application à la simulation des équations de McKean-Vlasov

On cherche à estimer la mesure invariante de l'équation de McKean-Vlasov (2.1). On peut pour cela introduire le schéma d'Euler implicite associé au système de particules (2.6).

Théorème 3.1.7. *Supposons que W soit convexe et que*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \text{Hess } V(x) \geq \lambda I_d.$$

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\tilde{X}_t^{i,N,\gamma}) - \int f d\mu_\infty \right| \geq r + c\gamma + \frac{c}{\sqrt{N}} + ce^{-\lambda t} \right) \leq 2e^{-N\lambda r^2/2}$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne et tous $t > 0$, $r > 0$, $N \in \mathbb{N}^$ et $\gamma > 0$.*

Remarque 3.1.8. *Les trois termes de déviation qui s'ajoutent à r proviennent respectivement de l'erreur faible du schéma d'Euler, de la propagation du chaos et de la convergence à l'équilibre du processus non linéaire :*

$$\underbrace{\mathbb{E}f(\tilde{X}_t^{i,N,\gamma}) - \mathbb{E}f(X_t^{i,N})}_{\leq c\gamma} + \underbrace{\mathbb{E}f(X_t^{i,N}) - \mathbb{E}f(\bar{X}_t)}_{\leq c/\sqrt{N}} + \underbrace{\mathbb{E}f(\bar{X}_t) - \int f d\mu}_{\leq ce^{-\lambda t}}$$

3.2 Diffusions inhomogènes

Cette section présente les résultats principaux de l'article [A6] issu d'une collaboration avec Jean-François Collet. Il propose une étude du mécanisme de dissipation d'entropie pour une classe d'équations aux dérivées partielles paraboliques dont les coefficients dépendent du temps. Ces équations n'ont en général pas de solution stationnaire. Nous établissons donc la décroissance exponentielle de l'entropie relative d'une orbite par rapport à une autre (plutôt que par rapport à une mesure de référence fixe). La méthode utilisée repose sur l'obtention d'une inégalité de type Sobolev logarithmique pour le semi-groupe associé grâce à une adaptation du critère de Bakry-Émery valable pour les diffusions homogènes. Une étude similaire est entreprise dans [DMLM03] pour des chaînes de Markov inhomogènes à temps discret.

3.2.1 Introduction

Considérons le processus de diffusion inhomogène $(X_t^{x,s})_{t \geq s}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t^{x,s} = x + \int_r^t b(r, X_r^{x,s}) dr + \sqrt{2} \int_s^t \sigma(r, X_r^{x,s}) dB_r, \quad t \geq s,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^d , $b(t, \cdot)$ (resp. $\sigma(t, \cdot)$) est une application régulière de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d (resp. l'ensemble des matrices carrées de taille d). À ce processus de Markov on associe le semi-groupe de Markov inhomogène $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ défini par

$$P_{s,t}f(x) := \mathbb{E}f(X_t^{s,x}).$$

L'évolution infinitésimale de ce processus est guidée par la famille d'opérateurs différentiels elliptiques $(L_t)_{t \geq 0}$ définis par

$$L_t f(x) := \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x) \partial_{ij} f(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x) \partial_i f(x), \quad (3.7)$$

où $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$ au sens où, pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\partial_s P_{s,t}f = -L_s P_{s,t}f \quad \text{et} \quad \partial_t P_{s,t}f = P_{s,t}L_t f. \quad (3.8)$$

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d et $u(t, \cdot)$ la densité de la loi de X_t sachant que $\mathcal{L}(X_0) = \mu$. Alors u est solution (au moins au sens faible) de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(t,x)u - a(t,x)\nabla u) = 0. \quad (3.9)$$

Puisque le processus de Markov est inhomogène, rien n'assure que la loi de X_t se stabilise lorsque t tend vers l'infini. Cependant, on peut vouloir quantifier un oubli de la condition initiale en comparant deux distributions au temps t . Il faut pour cela se donner un outil de mesure. Ici, nous utiliserons les Φ -entropies qui généralisent la variance et l'entropie (voir [Cha04] pour une étude détaillée).

3.2.2 Inégalités fonctionnelles locales inhomogènes

Soit $\Phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe régulière définie sur un intervalle fermé \mathcal{I} de \mathbb{R} non nécessairement borné. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . La Φ -entropie $\operatorname{Ent}_\mu^\Phi$ est définie sur l'ensemble des fonctions μ -intégrables f à valeurs dans \mathcal{I} par

$$\operatorname{Ent}_\mu^\Phi(f) = \int \Phi(f) d\mu - \Phi\left(\int f d\mu\right).$$

Puisque μ est une probabilité, remarquons que $\int f d\mu$ appartient à \mathcal{I} . On impose à Φ la condition supplémentaire suivante :

$$(x, y) \mapsto \Phi''(x)y^2 \text{ est positive et convexe sur } \mathcal{I} \times \mathcal{I}. \quad (3.10)$$

Remarque 3.2.1. La variance et l'entropie sont des Φ -entropies qui vérifient (3.10) associées respectivement aux fonctions $x \mapsto x^2$ sur $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ et $x \mapsto x \log x$ sur $\mathcal{I} = [0, +\infty)$.

Définition 3.2.2. On dit que le semi-groupe $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ satisfait à la Φ -Sobolev inégalité locale de constantes $(c(s,t))_{0 \leq s \leq t}$ si, pour tous $s \leq t$ et toute fonction régulière f ,

$$\text{Ent}_{P_{s,t}}^\Phi(f) \leq c(s,t) P_{s,t}(\Phi''(f)\Gamma(t)(f)).$$

Par analogie avec le cas homogène étudié dans [BE85, Bak94], associons à L_t les opérateurs bilinéaires $\Gamma(t)$ and $\mathbb{E}_2(t)$ définis par :

$$\begin{aligned} \Gamma(t)(f,g) &:= \frac{1}{2}[L_t(fg) - gL_t f - fL_t g], \\ \mathbb{E}_2(t)(f,g) &:= \frac{1}{2}[L_t\Gamma(f,g) - \Gamma(g, L_t f) - \Gamma(f, L_t g)]. \end{aligned}$$

On écrira $\Gamma(t)(f)$ pour $\Gamma(t)(f, f)$ et $\mathbb{E}_2(t)(f)$ pour $\mathbb{E}_2(t)(f, f)$.

Remarque 3.2.3. *Il est immédiat que*

$$\Gamma(t)(f,g) = \nabla f \cdot a(t, \cdot) \nabla g = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [a_{ij} + a_{ji}](t, \cdot) \partial_i f \partial_j g.$$

Remarque 3.2.4. *L'expression de \mathbb{E}_2 est beaucoup plus lourde dans le cas général. Cependant, si $a(t, \cdot)$ est la matrice identité on obtient*

$$\mathbb{E}_2(t)(f) := \|\text{Hess}(f)\|_2^2 - \nabla f \cdot \text{Jac}(b(t)) \nabla f, \quad (3.11)$$

où $\text{Hess}(\cdot)$ (resp. $\text{Jac}(\cdot)$) désigne la matrice hessienne (resp. jacobienne) et $\|B\|_2$ est la norme Hilbert-Schmidt.

Remarque 3.2.5. *Sous le critère de Bakry-Émery,*

$$\exists \rho \in \mathbb{R}, \quad \forall f \text{ régulière}, \quad \mathbb{E}_2(f) \geq \rho \Gamma(f),$$

un semi-groupe de diffusion homogène satisfait à une Φ -Sobolev inégalité locale (voir [Bak97] pour les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique et [Cha04] pour le cas général des Φ -Sobolev inégalités).

Définition 3.2.6. On dira que qu'un semi-groupe de diffusion satisfait au critère de Bakry-Émery inhomogène de fonction ρ

$$\forall f \text{ régulière}, \quad \mathbb{E}_2(t)(f) + \frac{1}{2} \partial_t \Gamma(t)(f) \geq \rho(t) \Gamma(f), \quad (\text{B-É}(\rho(t)))$$

où $\partial_t \Gamma(t)$ est donné par

$$\partial_t \Gamma(t)(f,g) := \sum_{i,j=1}^d \partial_t a_{ij}(t, \cdot) \partial_i f \partial_j g.$$

Théorème 3.2.7. *On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $(L_t)_{t \geq 0}$ satisfait à $(\text{B-É}(\rho(t)))$,
2. pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\sqrt{\Gamma(s)(P_{s,t}g)} \leq \exp\left(-\int_s^t \rho(u) du\right) P_{s,t}\left(\sqrt{\Gamma(t)(g)}\right).$$

3. le semi-groupe satisfait à une Φ -Sobolev inégalité locale de constante

$$c(s,t) = \int_s^t \exp\left(-2 \int_\tau^t \rho(u) du\right) d\tau.$$

3.2.3 Application : estimation de la dissipation de l'entropie

Si u et v sont deux solutions positives de masse 1 de l'équation (3.9) alors

$$\frac{d}{dt} H^\Phi(u|v) = - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi''\left(\frac{u}{v}\right) \left[\nabla\left(\frac{u}{v}\right) \cdot a \nabla\left(\frac{u}{v}\right) \right] v \, dx.$$

Cette formule illustre en particulier le fait que la partie transport de l'équation ne joue aucun rôle dans la dissipation de l'entropie : la diffusion est le seul processus irréversible. Remarquons que la convexité de Φ et le fait que a soit définie positive assure que l'entropie relative $H(f|g)$ est fonction strictement décroissante du temps et ce **quelles que soient les solutions u et v et quels que soient les coefficients a et b** . Lorsque les coefficients a et b dépendent du temps le système n'a en général pas d'équilibre : le problème

$$b(t, x)u(t, x) = a(t, x)\nabla u(t, x)$$

n'a pas de solution.

Théorème 3.2.8. *On suppose que $(L_t)_{t \geq 0}$ vérifie le critère (B-É($\rho(t)$)). Soient u et v deux solutions de (3.9) telles que v_0 satisfasse à une inégalité de Sobolev logarithmique de constante d_0 . Notons, pour tout $t > 0$,*

$$H(t) = H(u(t)|v(t)).$$

Alors

$$H(t) \leq H(0) \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{d(s)} \, ds\right),$$

où

$$d(t) := d_0 \exp\left(-2 \int_0^t \rho(r) \, dr\right) + \int_0^t \exp\left(-2 \int_\tau^t \rho(r) \, dr\right) \, d\tau.$$

3.3 Mélange de mesures

Un mélange est une combinaison convexe de lois. Malgré cette définition simple, un mélange peut être beaucoup plus subtil que ses composants. Mélanger des lois gaussiennes par exemple peut faire apparaître une mesure multimodale. Nous étudions dans [A8], en collaboration avec Djilil Chafaï, certaines propriétés fines des mélanges relatives à la concentration de la mesure et aux inégalités de type Poincaré et Sobolev logarithmique. Nous fournissons pour des mélanges généraux des bornes sur la concentration pour les fonctions lipschitziennes, qui font intervenir le diamètre de l'ensemble des lois mélangées pour la distance de transport W_1 . Notre analyse des inégalités de type Sobolev logarithmique pour des mélanges à deux composants de la forme $p\mu_1 + q\mu_0$, avec $p \in [0, 1]$, révèle des liens naturels avec une interpolation par transport à support prescrit. Nous montrons que la constante de Poincaré d'un mélange à deux composants peut rester bornée lorsque $\min(p, q) \rightarrow 0$, tandis que la constante de Sobolev logarithmique peut exploser. Ce résultat contre-intuitif ne se réduit pas à un phénomène de déconnexion de support, mais provient du comportement de la loi de Bernoulli asymétrique sous-jacente. Ce travail montre que, pour les mélanges, la concentration de la mesure est beaucoup plus stable que l'inégalité de Sobolev logarithmique. Nous illustrons notre étude par une collection d'exemples concrets laissant entrevoir la grande variété de comportements possibles pour les mélanges.

Pour simplifier la présentation, nous ne considérerons dans toute la suite que des mélanges à deux composants : la mesure de mélange est la loi binomiale $\mathcal{B}(p) = p\delta_1 + q\delta_0$ où $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$. On notera μ_0 et μ_1 les deux probabilités mélangées et $\mu_p = p\mu_1 + q\mu_0$ la mesure mélange.

3.3.1 Concentration de la mesure

On cherche ici à contrôler la fonction de concentration α_{μ_p} , définie en (1.4), en fonction, notamment, de α_{μ_0} et α_{μ_1} . On s'intéressera en particulier à la dépendance des bornes lorsque p est proche de 0 ou 1.

Théorème 3.3.1 (Concentration à deux composants). *Notons $x_p = \max(p, q)/(2c_p)$ où*

$$c_p = \frac{q - p}{4(\log q - \log p)}$$

avec les conventions $c_{1/2} = 1/8$ et $c_0 = c_1 = 0$. Alors, pour tout $\lambda > 0$,

$$\alpha_{\mu_p}(\lambda) \leq \max(\alpha_{\mu_0}, \alpha_{\mu_1})(\lambda) + \begin{cases} c_p \lambda^2 W_1(\mu_0, \mu_1)^2 & \text{si } \lambda W_1(\mu_0, \mu_1) \leq x_p, \\ \max(p, q)(\lambda W_1(\mu_0, \mu_1) - x_p) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si $\min(p, q) \rightarrow 0$, alors $c_p \sim -(4 \log p)^{-1} \rightarrow 0$ et $x_p \rightarrow \infty$. On retrouve ainsi à la limite une majoration de la forme $\alpha_{\mu_p} \leq \max(\alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_0})$ lorsque $\min(p, q) \rightarrow 0$.

Remarque 3.3.2 (Intérêt d'une borne sur la transformée de Laplace). *Supposons que μ_0 et μ_1 soient deux mesures gaussiennes sur \mathbb{R} de même variance σ^2 et de moyennes différentes m_0 et m_1 . Le résultat ci-dessus assure que, pour tout $r \geq 0$,*

$$\beta_{\mu_p}(r) \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2 + 4c_p W_1(\mu_0, \mu_1)^2}\right).$$

La borne reste pertinente lorsque σ tend vers 0 (on retrouve la borne pour la mesure de Bernoulli $p\delta_{m_1} + q\delta_{m_0}$). D'autre part, une borne déduite d'une inégalité de Sobolev logarithmique pour μ_p exploserait lorsque σ tend vers 0 (voir remarque 1.2.4).

3.3.2 Inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique

Dans toute la section on suppose que μ_0 et μ_1 sont des mesures de probabilité sur \mathbb{R} . On notera respectivement $C_P(\mu_i)$ et $C_G(\mu_i)$ les constantes optimales (lorsqu'elles seront finies) des inégalités de Poincaré ou de Sobolev logarithmique satisfaites par μ_i pour $i = 0, 1$. Pour que μ_p vérifie une inégalité de Poincaré il ne suffit pas que ce soit le cas pour μ_0 et μ_1 : si μ_0 et μ_1 sont à supports disjoints, alors μ_p ne peut vérifier une inégalité de Poincaré pour $p \in (0, 1)$ (voir remarque 1.2.4). Il faudra donc imposer une condition supplémentaire au couple (μ_0, μ_1) .

Pour $i = 0, 1$, on notera respectivement f_i et F_i la densité et la fonction de répartition de la mesure μ_i . De plus, S désignera l'union des supports de μ_0 et μ_1 et $\text{co}(S)$ son enveloppe convexe. D'après l'exemple des deux lois uniformes à supports disjoints, il semble nécessaire que cet ensemble $\text{co}(S)$ soit égal à l'union des supports de μ_0 et μ_1 .

Théorème 3.3.3 (Inégalité de Poincaré uniforme). *Pour tout $p \in [0, 1]$, on a*

$$C_P(\mu_p) \leq \max(C_P(\mu_0), C_P(\mu_1)) + I$$

avec

$$I = \int_{\text{co}(S)} \frac{(F_1(x) - F_0(x))^2}{f_1(x) + f_0(x)} dx. \quad (3.12)$$

La proposition ci-dessus assure donc que sous l'hypothèse que I soit fini, les mesures $(\mu_p)_{p \in [0, 1]}$ vérifient une inégalité de Poincaré avec une constante commune. La proposition suivante donne un résultat moins bon (mais nous verrons ensuite qu'il est optimal dans le cas général) pour l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Théorème 3.3.4 (Inégalité de Sobolev logarithmique). *Pour tout $p \in [0, 1]$, on a*

$$C_G(\mu_p) \leq \max(C_G(\mu_0), C_G(\mu_1)) + \frac{1}{2} \frac{\log(q) - \log(p)}{q - p} (2I + \max(C_P(\mu_0), C_P(\mu_1))),$$

où I est défini en (3.12).

Ce résultat peut-être amélioré légèrement (voir [A8]) pour permettre notamment d'établir les résultats positifs de la section suivante. Nous verrons ensuite que cette borne ne peut toutefois pas être améliorée dans le cas général.

3.3.3 Quelques exemples rassurants

Faire disparaître un composant dominé ne fait pas exploser la constante de Sobolev logarithmique.

Corollaire 3.3.5. *S'il existe $c > 0$ tel que $f_1 \geq cf_0$ alors, pour tout $p_0 < 1$,*

$$\sup_{p \in [0, p_0]} C_G(\mu_p) < +\infty.$$

On peut même obtenir un résultat plus fort pour l'exemple de deux lois gaussiennes.

Corollaire 3.3.6. *Si μ_0 et μ_1 sont deux gaussiennes de paramètres différents alors*

$$\sup_{p \in [0, 1]} C_G(\mu_p) < +\infty.$$

3.3.4 Un premier exemple explosif

Choisissons à présent $\mu_1 = \mathcal{N}(0, 1)$ et $\mu_0 = \mathcal{U}([-1, +1])$ et intéressons-nous à $C_G(\mu_p)$ lorsque p tend vers 0.

Proposition 3.3.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$C_G(\mu_p) \geq -C \log p$$

pour tout $p \in (0, 1)$. Ainsi, $C_G(\mu_p)$ explose comme $-\log p$ au voisinage de 0.

Cette minoration est obtenue grâce au critère dû à Bobkov et Götze établi dans [BG99] et amélioré ensuite dans [BR03a]. Cet exemple montre que la dépendance en p de la majoration de la constante $C_G(\mu_p)$ de la proposition 3.3.4 ne peut être améliorée. On pourrait croire que ce phénomène d'explosion ne provient que de la perte de support abrupte entre μ_p pour p petit et μ_0 . L'exemple suivant montre que la situation est plus complexe.

3.3.5 Un exemple surprenant

On choisit $f_1(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ et $f_0(x) = Z_a^{-1} e^{-|x|^a}$ où $a > 2$ est fixé et $Z_a = 2\Gamma(a^{-1})a^{-1}$. Remarquons que μ_0 possède des queues plus légères que μ_p pour $p > 0$.

Proposition 3.3.8. *Il existe une constante $C(a) > 0$ telle que*

$$C_G(\mu_p) \geq C(a) (-\log(p))^{1-2a^{-1}}$$

pour p assez petit. En particulier, $C_G(\mu_p)$ tend vers $+\infty$ quand $p \rightarrow 0^+$.

On voit ainsi qu'il ne suffit pas de supposer que les deux mesures aient le même support pour améliorer la borne de la proposition 3.3.4. Remarquons aussi que lorsque a tend vers 0, on retrouve l'exemple précédent.

Le potentiel $-\log f_p$ de μ_p présente de multiples puits comme le montre la figure 3.1. La profondeur de ces puits fait exploser la constante de Sobolev logarithmique mais pas celle de Poincaré!

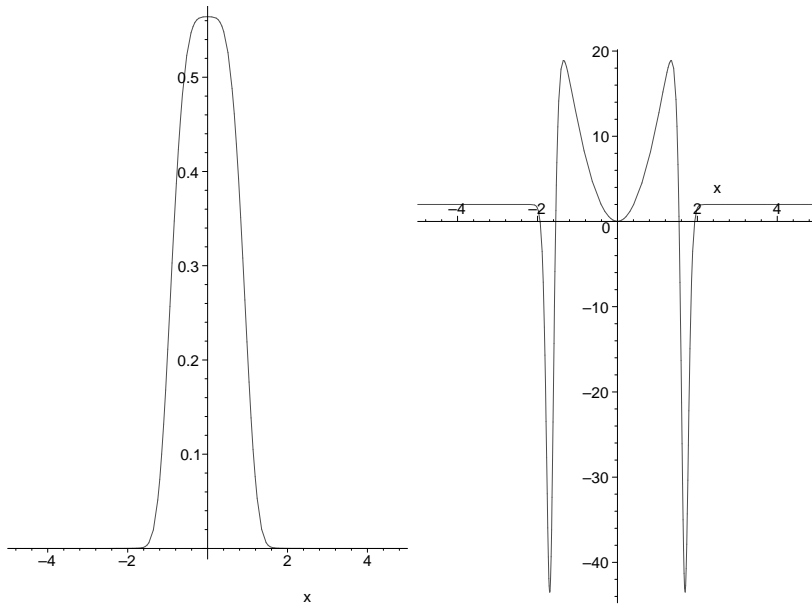


FIGURE 3.1 – Densité et dérivée seconde de $-\log f_p$ dans l'exemple 3.3.5 avec $p = 1/100$ et $a = 4$. Le second dessin met en évidence un potentiel à multiples puits.

3.4 Ouvertures

Le travail sur les mélanges laisse encore sans réponse de nombreuses questions intéressantes. Sur \mathbb{R} nous avons vu des exemples sur lesquels la constante de Sobolev logarithmique de μ_p explose au voisinage de 0 tandis que celle de Poincaré reste bornée. On peut se demander ce qu'il en ait des inégalités interpolant entre ces deux cas d'école.

D'autre part, arrêtons-nous un instant sur les difficultés supplémentaires qui surgissent en dimensions supérieures. Pour contrôler $C_P(\mu_p)$, on écrit

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mu_p}(f) &= p\text{Var}_{\mu_1}(f) + q\text{Var}_{\mu_0}(f) + pq(\mathbb{E}_{\mu_1}f - \mathbb{E}_{\mu_0}f)^2 \\ &\leq \max(C_P(\mu_0), C_P(\mu_1))\mathbb{E}_{\mu_p}(|\nabla f|^2) + pq(\mathbb{E}_{\mu_1}f - \mathbb{E}_{\mu_0}f)^2. \end{aligned}$$

Il reste donc à contrôler le dernier terme (qui contient notamment les problèmes de recollement éventuels des supports S_0 et S_1 de μ_0 et μ_1). Considérons une application T de S_0 dans S_1 telle que μ_1 soit la mesure image de μ_0 par T . Pour chaque point x dans S_0 choisissons une fonction $\gamma_x : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma_x(0) = x$ et $\gamma_x(1) = T(x)$. On a alors que

$$(\mathbb{E}_{\mu_1}(f) - \mathbb{E}_{\mu_0}(f))^2 \leq \left(\int_{S_0} \int_0^1 |\dot{\gamma}_x(s)|^2 \mu_0(dx) \right) \left(\int_{S_0} \int_0^1 |\nabla f|^2(\gamma_x(s)) ds \mu_0(dx) \right).$$

Pour tout $s \in [0, 1]$, notons $\mu_{(s)}$ la mesure image de μ_0 par l'application $x \mapsto \gamma_x(s)$ et $\bar{\mu}$ la mesure définie par $\bar{\mu}(A) = \int_0^1 \mu_{(s)}(A) ds$. Pour obtenir une inégalité de Poincaré, il reste donc à obtenir un contrôle de la forme $\bar{\mu} \leq c(p)\mu_p$ et contrôler le premier terme du membre de droite dans l'inégalité ci-dessus. Dans le cas où les supports de μ_0 et μ_1 sont \mathbb{R}^d tout entier, on peut choisir T comme réalisant le transport optimal de μ_0 sur μ_1 et $\gamma_x(t) = tT(x) + (1-t)x$ pour tous $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Dans ce cas,

$$\int_{S_0} \int_0^1 |\dot{\gamma}_x(s)|^2 \mu_0(dx) = \int_{S_0} |T(x) - x|^2 \mu_0(dx) = W_2(\mu_0, \mu_1)^2.$$

Il faut remarquer que si $S_0 \cup S_1$ n'est pas égal à \mathbb{R}^d alors le support de $\bar{\mu}$ peut ne pas être inclus dans celui de μ_p , comme par exemple si μ_0 et μ_1 sont les mesures uniformes sur les boules unités de centres respectifs $(0, 0)$ et $(0, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . Dans ce cas, le contrôle de $\bar{\mu}$ par μ_p est impossible. Il faut donc astreindre les chemins reliant x à $T(x)$ à rester dans le support de μ_p . On est alors amené à considérer un problème de transport optimal sous contrainte de support...

Chapitre 4

Processus de Markov déterministes par morceaux

Ce chapitre présente l'étude du comportement en temps long de deux processus de Markov déterministes par morceaux ainsi qu'un travail concernant une diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients markoviens. J'ai choisi de placer ici ce travail car les méthodes employées dans les différentes situations ont des points communs importants.

4.1 Modélisation du processus TCP

Le processus « TCP window size » modélise le célèbre « Transmission Control Protocol » utilisé pour la transmission de données sur Internet. Ce processus de Markov à temps continu à valeurs dans $[0, \infty)$ est ergodique et irréversible. Il appartient à la classe des processus à croissance additive et décroissance multiplicative (AIMD en anglais). Ses trajectoires sont linéaires par morceaux et tout l'aléa est contenu dans le mécanisme de saut. Ce processus et ses variantes ont été beaucoup étudiées (voir notamment [DGR02, GRZ04, Ott06, OS07, OK08, MZ09, GR09]).

Dans [A9] nous obtenons, avec Djalil Chafaï et Katy Paroux, des estimées quantitatives de convergence à l'équilibre en distance W_1 pour le processus et sa chaîne incluse.

4.1.1 Le processus à temps continu

On introduit le processus de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ associé au générateur infinitésimal

$$L_a(f)(x) = f'(x) + (x + a) \int_0^1 (f(hx) - f(x))H(dh), \quad (4.1)$$

où H est une mesure de probabilité à support dans $[0, 1]$. La dynamique du processus est la suivante : entre deux sauts X croît linéairement avec une pente 1, les sauts apparaissent au taux $x + a$ et sont donnés par une multiplication avec une variable aléatoire de loi H . En particulier, si $X_0 = x$, alors la loi du premier temps de saut T_1 est définie par

$$\mathbb{P}(T_1 \geq t) = \exp\left(-\int_0^t (X_s + a) ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t + x + a)^2 - \frac{1}{2}(x + a)^2\right)$$

pour tout $t \geq 0$ puisque $X_s = x + s$ pour $s < T_1$. En d'autres termes, T_1 a même loi que la variable aléatoire

$$\sqrt{(x + a)^2 + 2E_1} - (x + a),$$

où E_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1. De plus,

$$X_t = \begin{cases} x + t & \text{si } t \in [0, T_1), \\ Q_1(x + T_1) & \text{si } t = T_1, \end{cases}$$

où Q_1 suit la loi H et est indépendant de E_1 . On pourra consulter l'ouvrage de référence [Dav93] sur la construction d'un processus de Markov déterministe par morceaux et les propriétés de son générateur infinitésimal.

Ce processus à la dynamique très simple est toutefois irréversible et à valeurs dans un espace non compact. En fait, la principale difficulté vient du fait que le taux de saut n'est pas constant mais dépend de la position. Si le taux de saut est constant, alors on peut coupler deux trajectoires issues de deux points différents en choisissant les mêmes temps de taux et les mêmes coefficients multiplicatifs $(Q_n)_{n \geq 1}$. Ceci fournit immédiatement une convergence à l'équilibre en distance de Wasserstein W_p pour tout $p \geq 1$.

Lorsque le taux de saut dépend de la position, on ne peut qu'essayer de favoriser des sauts simultanés mais on ne peut éviter quelques sauts isolés. Pour construire deux trajectoires X et Y issues respectivement de x et y (avec $x > y$ par exemple) on peut faire en sorte que Y (dont le taux de saut instantané est toujours inférieur à celui de X) ne saute pas avant X . On a ainsi un saut simultané ou un saut de X seul. Et on recommence... L'idée directrice est qu'un saut simultané rapproche les trajectoires (l'écart est multiplié par un facteur de loi H) et que plus les trajectoires sont proches et plus les processus sauteront ensemble avec une grande probabilité. On obtient en particulier que les deux processus sauteront toujours ensemble à partir d'un certain temps (le nombre de sauts non simultanés est aléatoire mais fini). On introduit donc le processus de Markov défini sur \mathbb{R}_+^2 par son générateur infinitésimal :

$$\begin{aligned} \bar{L}_a f(x, y) = & \partial_1 f(x, y) + \partial_2 f(x, y) \\ & + (x - y) \int_0^1 (f(hx, y) - f(x, y)) H(dh) \\ & + (y + a) \int_0^1 (f(hx, hy) - f(x, y)) H(dh) \end{aligned} \quad (4.2)$$

si $x \geq y$ (si $x < y$ il faut inverser les rôles de ces deux variables). Grâce à ce couplage, on peut obtenir les estimations suivantes.

Théorème 4.1.1. *Supposons $a > 0$. Soit η_0 et η'_0 deux mesures de probabilité sur $[0, +\infty)$ admettant un moment d'ordre 1. Pour tout $t > 0$, notons η_t (resp. η'_t) la loi de X_t dirigé par (4.1) lorsque X_0 est distribué selon η_0 (resp. η'_0). Alors, pour tout $t > 0$, on a*

$$W_1(\eta_t, \eta'_t) \leq e^{-a\kappa_1 t} W_1(\eta_0, \eta'_0),$$

où $\kappa_1 = 1 - \int_0^1 h H(dh)$. En particulier, si η' est la mesure invariante μ de X , alors, pour tout $t \geq 0$

$$W_1(\eta_t, \mu) \leq e^{-a\kappa_1 t} W_1(\eta_0, \mu).$$

Le fait que le taux de saut tende vers $+\infty$ en $+\infty$ fait que la force de rappel est très forte : X revient de l'infini en temps fini comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.1.2. *Supposons $a > 0$. Soit η_0 et η'_0 deux mesures de probabilité sur $[0, +\infty)$ quelconques (i.e. sans condition de moment). Pour tout $t > 0$, notons η_t (resp. η'_t) la loi de X_t dirigé par (4.1) lorsque X_0 est distribué selon η_0 (resp. η'_0). Alors, pour tous $t > s > 0$,*

$$W_1(\eta_t, \eta'_t) \leq \frac{2e^{a\kappa_1 s}}{\sqrt{\kappa_1} \tanh(s\sqrt{\kappa_1})} e^{-a\kappa_1 t}.$$

Dans le cas où a est nul, le résultat est moins bon. On obtient la décroissance de la fonction distance mais pas la convergence exponentielle. Voici le résultat dans le cas où H est une mesure de Dirac.

Théorème 4.1.3. *Supposons que $a = 0$ et $H = \delta_h$ avec $h \in (0, 1)$. Alors l'ensemble $D_h = \{(x, y), hy \leq x \leq h^{-1}y\}$ est absorbant et, si $(x, y) \in D_h$, le processus (X, Y) dirigé par le générateur \bar{L}_0 donné en (4.2) satisfait*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}_{(x,y)}(|X_t - Y_t|) \leq -(1+h) \mathbb{E}_{(x,y)}(|X_t - Y_t|^2) \quad (4.3)$$

pour tous $x, y \geq 0$. En particulier, pour tout $t \geq 0$ et $X_0, Y_0 \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}(|X_t - Y_t|) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_0 - Y_0|)}{1 + (1+h)\mathbb{E}(|X_0 - Y_0|)t}. \quad (4.4)$$

4.1.2 La chaîne incluse

On se place ici dans le cas où $a = 0$ (pour simplifier les formules). La chaîne incluse $(\hat{X}_n)_{n \geq 0}$ (définie comme le processus X observé à ses temps de saut) est homogène et son noyau de transition K est donné, pour tout $x \geq 0$ et toute fonction mesurable bornée $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$K(f)(x) = \int_0^\infty f(y) K(x, dy) = \mathbb{E}\left[f\left(Q\sqrt{x^2 + 2E}\right)\right] \quad (4.5)$$

où E est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et Q est une variable aléatoire de loi H indépendante de E .

Théorème 4.1.4. *Soit η et η' deux mesures de probabilité sur $[0, +\infty)$ admettant un moment d'ordre p fini. Notons ηK^n la loi de \hat{X}_n lorsque X_0 est de loi η . Pour tout $n \geq 0$*

$$W_p(\eta K^n, \eta' K^n) \leq \mathbb{E}(Q^p)^{n/p} W_p(\eta, \eta'),$$

où Q est une variable aléatoire de loi H . En particulier, si ν est la mesure invariante de \hat{X} alors

$$W_p(\eta K^n, \nu) \leq \mathbb{E}(Q^p)^{n/p} W_p(\eta, \nu).$$

On peut également établir une inégalité de concentration gaussienne pour le théorème ergodique.

Théorème 4.1.5. *Supposons que H soit la mesure de Dirac au point $\delta \in (0, 1)$. Soit \hat{X} la chaîne de Markov de noyau G issue de $\hat{X}_0 = x \geq 0$. Alors, pour tout $u \geq 0$ et toute fonction 1-lipschitzienne $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\hat{X}_k) - \int f d\nu\right| \geq u + \frac{\delta}{1-\delta} W_1(\delta_x, \nu)\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n(1-\delta^2)u^2}{2\delta^2}\right).$$

4.2 Mouvement d'une bactérie

Le mouvement d'une bactérie peut également être modélisé par un processus de Markov déterministe par morceaux. On pourra consulter [EO05, ODA88] pour une description détaillée de ces modèles. Dans cette section, nous allons voir un modèle assez sommaire mais qui rend assez bien compte de la dynamique observée et pour lequel on peut expliciter la mesure invariante

et fournir une vitesse de convergence à l'équilibre explicite. Les idées présentées ci-dessous sont tirées de [A13] en collaboration avec Joaquin Fontbona et Hélène Guérin.

Une bactérie se déplace grâce à des flagelles situés sur son pourtour. Tant que ceux-ci « rament » dans le même sens, la bactérie se déplace en ligne droite à vitesse constante. Après un certain laps de temps, les flagelles se désynchronisent et la bactérie tourne sur elle-même avant de repartir en ligne droite. Le temps de retournement est négligeable devant la durée d'une « chevauchée » rectiligne dont la durée est modélisée par une variable aléatoire exponentielle : le retournement n'est pas calculé à l'avance. Nous supposons que la bactérie se déplace sur une ligne droite. Ainsi, lorsque la bactérie tourne sur-elle même, elle effectue un demi-tour et repart en sens inverse. Nous supposons de plus qu'en l'origine, une source émet un signal attractif pour la bactérie. Celle-ci ne peut savoir où exactement est située la source mais elle est capable de savoir si elle s'en éloigne ou s'en rapproche (en mesurant le gradient du signal au travers de son corps allongé). Elle aura donc tendance à se retourner plus vite lorsqu'elle s'éloigne de la source que quand elle s'en approche.

On notera (X_t, V_t) le couple position-vitesse de la particule au temps t . La composante des vitesses prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, +1\}$ et le générateur infinitésimal du processus est donné par

$$Lf(x, v) = v\partial_x f(x, v) + \left(a + (b - a)\mathbb{1}_{\{xv > 0\}}\right)(f(x, -v) - f(x, v)).$$

Ainsi, si xv est positif, *i.e.* si la particule s'éloigne de l'origine alors le taux de saut vaut b tandis qu'il vaut a dans le cas contraire. On supposera $a < b$.

Il est intuitivement clair que le processus est ergodique dans la mesure où la bactérie s'approche de l'origine plus facilement qu'elle ne s'en éloigne. On peut noter une analogie forte avec le processus de diffusion solution de l'équation différentielle suivante :

$$dZ_t = \sqrt{2}dB_t - \operatorname{sgn}(Z_t) dt \quad (4.6)$$

dont on peut montrer qu'il admet pour mesure invariante la loi de Laplace de densité $x \mapsto e^{-|x|}/2$.

Théorème 4.2.1. *La mesure invariante μ de (X, V) est la mesure produit sur $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ donnée par*

$$\mu(dy, dw) = \frac{b-a}{2} e^{-(b-a)|y|} dy \otimes \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1})(dw).$$

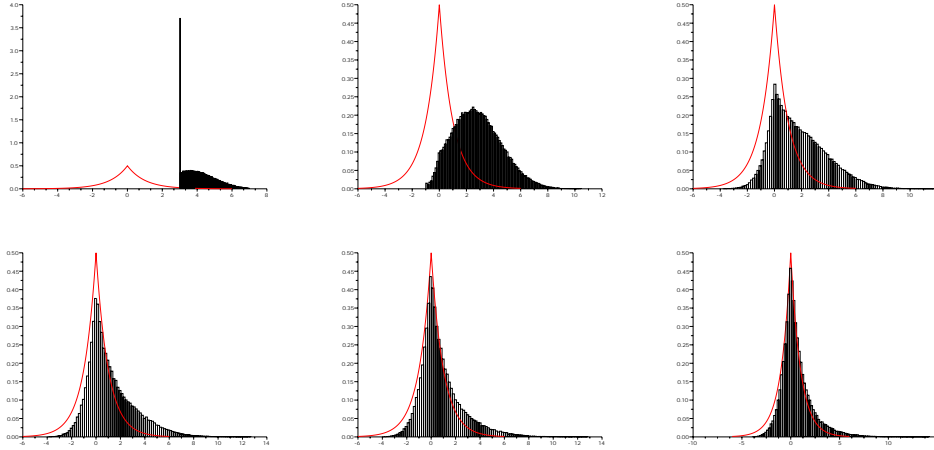
Pour tous $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ et $v, \tilde{v} \in \{-1, +1\}$,

$$\left\| \mathcal{L}(X_t^{x,v}, V_t^{x,v}) - \mathcal{L}(X_t^{\tilde{x},\tilde{v}}, V_t^{\tilde{x},\tilde{v}}) \right\|_{\text{TV}} \leq C(a, b) e^{r(a,b)|x \vee \tilde{x}|} e^{-\lambda_c t}, \quad (4.7)$$

où

$$C(a, b) = \left(\frac{b}{a}\right)^{5/2} \frac{a+b}{\sqrt{ab}+b}, \quad r(a, b) = \frac{3(b-a)}{4} \vee (b - \sqrt{ab}) \quad \text{et} \quad \lambda_c = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2}.$$

Le principe de la preuve est de construire explicitement un couplage coalescent de deux trajectoires issues de deux conditions initiales différentes dans $\mathbb{R} \times \{-1, +1\}$. Cette démarche peut faire penser aux arguments utilisés pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les files d'attente où même le processus solution de (4.6). Pour ces processus de nombreux choix de couplages fonctionnent et notamment le plus simple qui consiste à choisir des évolutions indépendantes pour les trajectoires jusqu'au temps où elles se croisent. Un résultat sur la transformée de Laplace des temps d'atteinte permet alors de conclure (voir [Rob03]). Dans le cas présent, les choses sont un peu plus délicates car les trajectoires doivent se croiser dans $\mathbb{R} \times \{-1, +1\}$ (ce qui ne peut arriver pour deux trajectoires indépendantes). Il faut donc être plus soigneux pour construire le couplage coalescent.

FIGURE 4.1 – La loi de X_t issu $(5, -1)$ pour $t \in \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$ avec $a = 1$ et $b = 2$.

4.3 Diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients markoviens

On s'intéresse ici à une diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck Y modulée par une chaîne de Markov ergodique à espace d'états fini $X : dY_t = -\lambda(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dB_t$ où Y_0 est donné. Sous l'hypothèse d'ergodicité, nous obtenons dans [A10], avec Jean-Baptiste Bardet et Hélène Guérin, des estimations quantitatives du comportement en temps long de Y . Nous caractérisons également les queues de la mesure invariante ν de Y en établissant la trichotomie suivante : les queues de ν peuvent être polynomiales (seuls certains de ses moments sont finis), quasi-exponentielles (sa transformée de Laplace est finie sur un intervalle borné non vide), quasi-gaussiennes (sa transformée de Laplace est minorée et majorée par deux transformées de Laplace de mesures gaussiennes). Les moments critiques sont exprimés en fonction des paramètres.

Le processus *modulateur* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $E = \{1, \dots, d\}$ (avec $d \geq 2$) de générateur infinitésimal $A = (A(x, \tilde{x}))_{x, \tilde{x} \in E}$. Nous noterons $a(x)$ le taux de saut à l'état $x \in E$ et $P = (P(x, \tilde{x}))_{x, \tilde{x} \in E}$ la matrice de transition de la chaîne incluse. On a, pour $x \neq \tilde{x}$ dans E ,

$$a(x) = -A(x, x) \quad \text{et} \quad P(x, \tilde{x}) = -\frac{A(x, \tilde{x})}{A(x, x)}.$$

On supposera P irréductible récurrent. Le processus X est ergodique et son unique mesure invariante sera notée μ (voir [Nor97] pour des détails supplémentaires). Soit $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$. De plus, on utilisera la notation \mathbb{E}_x pour désigner l'espérance sous la loi de X sachant que $X_0 = x$.

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{R} et Y_0 une variable aléatoire réelle telle que B , Y_0 and X soient indépendants. Le processus *modulé* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est alors défini par :

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t \lambda(X_u)Y_u du + \int_0^t \sigma(X_u) dB_u, \quad (4.8)$$

où λ et σ sont deux fonctions de E dans \mathbb{R} et $(0, \infty)$ respectivement. Si λ et σ sont constants, Y est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck attractif ($\lambda > 0$), neutre ($\lambda = 0$) ou répulsif ($\lambda < 0$) selon les cas.

Remarque 4.3.1. *En d'autres termes, le processus complet (X, Y) est le processus de Markov sur $E \times \mathbb{R}$ de générateur infinitésimal \mathcal{A} donné par :*

$$\mathcal{A}f(x, y) = \sum_{\tilde{x} \in E} A(x, \tilde{x})(f(\tilde{x}, y) - f(x, y)) + \frac{\sigma(x)^2}{2} \partial_{22}^2 f(x, y) - \lambda(x)y \partial_2 f(x, y).$$

Ces processus ont été introduits dans [BBG96] comme des perturbations browniennes de processus de Markov déterministes par morceaux intervenant dans la modélisation de problèmes de contrôle. Ils peuvent être également vu comme des versions à temps continu de processus ARMA sous régime markovien qui sont utilisés en économétrie (voir [GIY04] et ses références) ou en océanographie (voir [Ail06, AMP06]) par exemple. Signalons également l'utilisation de tels processus pour modéliser des ruptures de cours d'actions (voir [BSDG⁺06]).

Dans [GIY04], il est prouvé que Y est ergodique si et seulement si

$$\sum_{x \in E} \lambda(x) \mu(x) > 0, \quad (4.9)$$

ce qui revient à supposer que le processus Y est attractif « en moyenne » sous la mesure invariante de X .

Avant d'énoncer le théorème caractérisant les queues de la mesure invariante de Y , il nous faut donner quelques définitions.

Notation 4.3.2. *Posons*

$$\underline{\sigma}^2 = \min_{x \in E} \sigma^2(x) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^2 = \max_{x \in E} \sigma^2(x). \quad (4.10)$$

On notera A_p la matrice $A - p\Lambda$ où Λ est la matrice diagonale de diagonale $(\lambda(1), \dots, \lambda(d))$. On associe à A_p le réel

$$\eta_p := - \max_{\gamma \in \text{Spec}(A_p)} \text{Re } \gamma. \quad (4.11)$$

Si $\underline{\lambda} = \min_{x \in E} \lambda(x)$ est positif, l'ensemble E est la réunion de

$$M = \{x \in E : \lambda(x) > 0\} \quad \text{et} \quad N = \{x \in E : \lambda(x) = 0\}. \quad (4.12)$$

Posons

$$\beta(x) = \frac{\sigma(x)^2}{2a(x)} \quad \text{et} \quad \bar{\beta} = \max_{x \in N} \beta(x), \quad (4.13)$$

et, pour tout $v \in \mathbb{R}$ tel que $v^2 < \bar{\beta}^{-1}$, on définit la matrice

$$P_v^{(N)} = \left(\frac{1}{1 - \beta(x)v^2} P(x, x') \right)_{x, x' \in N}. \quad (4.14)$$

Le théorème ci-dessous montre que la taille des queues de la mesure invariante de Y est essentiellement liée à la position de $\underline{\lambda}$ par rapport à 0. Il caractérise également ces queues dans les trois cas en fonction des objets définis ci-dessus.

Théorème 4.3.3. *On suppose que l'hypothèse d'ergodicité (4.9) est satisfaite. Posons*

$$\kappa = \sup \{p \geq 0 : \eta_p > 0\} \in (0, +\infty]. \quad (4.15)$$

Alors la fonction $p \mapsto \eta_p$ est continue, strictement positive sur $(0, \kappa)$ et strictement négative sur $(\kappa, +\infty)$. De plus, la trichotomie suivante a lieu :

1. si $\underline{\lambda} < 0$ alors $0 < \kappa \leq \min \{-a(x)/\lambda(x) : \lambda(x) < 0\}$, et le moment d'ordre p de ν est fini si et seulement si $p < \kappa$;
2. si $\underline{\lambda} = 0$, alors κ est infini et le domaine de la transformée de Laplace de ν est l'ensemble $(-v_c, v_c)$ où

$$v_c = \sup \left\{ v > 0 : \rho(P_v^{(N)}) < 1 \right\} ; \quad (4.16)$$

3. si $\underline{\lambda} > 0$, alors κ est infini et la transformée de Laplace de ν est quasi-gaussienne au sens où, pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\exp \left(\frac{\sigma^2 v^2}{4\lambda} \right) \leq \int e^{vy} \nu(dy) \leq \exp \left(\frac{\bar{\sigma}^2 v^2}{4\lambda} \right).$$

De plus, ses queues ressemblent à celles d'une mesure gaussienne de variance $\bar{\alpha}/2$ où $\bar{\alpha} = \max_{x \in E} \sigma(x)^2/\lambda(x)$ puisque $y \mapsto e^{\delta y^2}$ est ν -intégrable si et seulement si $\delta < 1/\bar{\alpha}$.

Remarque 4.3.4. Le fait que la mesure invariante possède certains moments était déjà établi dans [GIY04]. La dichotomie entre les cas $\underline{\lambda} < 0$ et $\underline{\lambda} \geq 0$ est étudiée dans [dSY05]. La technique de preuve de ces travaux antérieurs consiste à analyser le processus de Markov (X, Y) à des instants régulièrement espacés d'une distance δ puis à faire tendre δ vers 0 en s'assurant que les estimations restent valables à la limite.

On peut établir un résultat de contraction en distance de Wasserstein pour la composante réelle du processus : on cherche à comparer les lois de Y_t et \tilde{Y}_t lorsque les lois initiales sont différentes. L'énoncé de celui-ci est plus simple si l'on suppose que les premières marginales sont égales à l'instant initial. L'énoncé général est donné dans [A11].

Notons $\mathcal{P}_p(E \times \mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $E \times \mathbb{R}$ dont la seconde marginale admet un moment d'ordre p :

$$\mathcal{P}_p(E \times \mathbb{R}) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}) ; \int_{E \times \mathbb{R}} |y|^p \pi(dx, dy) < +\infty \right\}. \quad (4.17)$$

Théorème 4.3.5. On suppose que l'hypothèse d'ergodicité (4.9) est satisfaite. Soit $p < \kappa$ où κ est défini en (4.15). Il existe $C(p)$ tel que, pour toutes mesures de probabilité π_0 et $\tilde{\pi}_0$ de \mathcal{P}_p ayant même première marginale, on ait, pour tout $t \geq 0$,

$$W_p(\nu_t, \tilde{\nu}_t) \leq C(p) W_p(\nu_0, \tilde{\nu}_0) e^{-(\eta_p/p)t},$$

où η_p est donné par (4.11) et ν_t est la loi de Y_t solution de (4.8) lorsque (Y_0, X_0) suit la loi π_0 .

4.4 Ouvertures

Dans le travail [A14] (en cours d'achèvement) en collaboration avec Stéphane Le Borgne, nous étudions le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times E$ avec $E = \{1, 2, \dots, n\}$ de générateur infinitésimal donné par

$$Lf(x, y) = g(x, y) \nabla_x f(x, y) + \lambda(x, y) \sum_{\tilde{y} \in E} P(y, \tilde{y}) (f(x, \tilde{y}) - f(x, y)),$$

où P est une matrice markovienne (à diagonale nulle) et pour tout $y \in E$, $x \mapsto g(x, y)$ est un champ de vecteurs régulier sur \mathbb{R}^d . Sous l'hypothèse que chacun des flots possède un unique point stable et soit fortement dissipatif, nous montrons l'existence et l'unicité d'une mesure invariante pour ce processus et obtenons des vitesses de convergence exponentielles à l'équilibre

en distance de Wasserstein dans le cas où les taux de saut λ de la variable discrète sont des fonctions lipschitziennes de la variable continue.

De multiples questions restent ouvertes dans le cadre des processus de Markov déterministes par morceaux : absolue continuité de la mesure invariante, vitesse de convergence à l'équilibre etc.

Bibliographie générale

- [Ail06] P. AILLIOT – « Some theoretical results on Markov-switching autoregressive models with gamma innovations », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), no. 4, p. 271–274. 4.3
- [AMP06] P. AILLIOT, V. MONBET et M. PREVOSTO – « An autoregressive model with time-varying coefficients for wind fields », *Environmetrics* **17** (2006), no. 2, p. 107–117. 4.3
- [Bak94] D. BAKRY – « L’hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXII—1992. Lectures Notes in Math.*, vol 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114. 1.2, 3.2.2
- [Bak97] — , « On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups », *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75. 3.1.2, 3.2.5
- [BBG96] G. K. BASAK, A. BISI et M. K. GHOSH – « Stability of a random diffusion with linear drift », *J. Math. Anal. Appl.* **202** (1996), no. 2, p. 604–622. 4.3
- [BCCP98] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI, J. A. CARRILLO et M. PULVIRENTI – « A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media », *J. Statist. Phys.* **91** (1998), no. 5-6, p. 979–990. 2
- [BCG08] D. BAKRY, P. CATTIAUX et A. GUILLIN – « Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré », *J. Funct. Anal.* **254** (2008), no. 3, p. 727–759. 2.4
- [BCP97] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI et M. PULVIRENTI – « A kinetic equation for granular media », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **31** (1997), no. 5, p. 615–641. 2, 2.2
- [BCR06] F. BARTHE, P. CATTIAUX et C. ROBERTO – « Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry », *Rev. Mat. Iberoam.* **22** (2006), no. 3, p. 993–1067. 1.2
- [BE85] D. BAKRY et M. ÉMERY – « Diffusions hypercontractives », *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lectures Notes in Math.*, vol 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206. 1.2.2, 1.2, 3.2.2
- [BG99] S. G. BOBKOV et F. GÖTZE – « Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **163** (1999), no. 1, p. 1–28. 1.4, 3.3.4
- [BGL01] S. G. BOBKOV, I. GENTIL et M. LEDOUX – « Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations », *J. Math. Pures Appl. (9)* **80** (2001), no. 7, p. 669–696. 1.3.3, 1.3

- [BGV07] F. BOLLEY, A. GUILLIN et C. VILLANI – « Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces », *Probab. Theory Related Fields* **137** (2007), no. 3-4, p. 541–593. 2.1, 2.4.6
- [BLR02] M. BENAÏM, M. LEDOUX et O. RAIMOND – « Self-interacting diffusions », *Probab. Theory Related Fields* **122** (2002), no. 1, p. 1–41. 2.5
- [Bol10] F. BOLLEY – « Quantitative concentration inequalities on sample path space for mean field interaction », *ESAIM Probab. Stat.* **14** (2010), p. 192–209. 2.1, 2.4.6
- [BR03a] F. BARTHE et C. ROBERTO – « Sobolev inequalities for probability measures on the real line », *Studia Math.* **159** (2003), no. 3, p. 481–497, Dedicated to Professor Aleksander Pełczyński on the occasion of his 70th birthday (Polish). 3.3.4
- [BR03b] M. BENAÏM et O. RAIMOND – « Self-interacting diffusions. II. Convergence in law », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **39** (2003), no. 6, p. 1043–1055. 2.5
- [BR05] —, « Self-interacting diffusions. III. Symmetric interactions », *Ann. Probab.* **33** (2005), no. 5, p. 1717–1759. 2.5
- [BR08] —, « A Bakry-Emery criterion for self-interacting diffusions », *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V*, *Progr. Probab.*, vol. 59, Birkhäuser, Basel, 2008, p. 19–22. 2.5
- [BRTV98] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, D. TALAY et P. VALLOIS – « Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 173–201. 2.1
- [BRV98] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE et P. VALLOIS – « Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 203–224. 2.1
- [BSDG⁺06] C. BLANCHET-SCALLIET, A. DIOP, R. GIBSON, D. TALAY et E. TANRÉ – « Technical analysis techniques versus mathematical models : boundaries of their validity domains », *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2004*, Springer, Berlin, 2006, p. 15–30. 4.3
- [BT95] V. BALLY et D. TALAY – « The Euler scheme for stochastic differential equations : error analysis with Malliavin calculus », *Math. Comput. Simulation* **38** (1995), no. 1-3, p. 35–41, *Probabilités numériques* (Paris, 1992). 3.1, 3.1.2
- [CD08] O. L. V. COSTA et F. DUFOUR – « Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes », *SIAM J. Control Optim.* **47** (2008), no. 2, p. 1053–1077. 1.5
- [CDPP09] P. CAPUTO, P. DAI PRA et G. POSTA – « Convex entropy decay via the Bochner-Bakry-Emery approach », *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **45** (2009), no. 3, p. 734–753. 1.5
- [Cha04] D. CHAFAÏ – « Entropies, convexity, and functional inequalities : on Φ -entropies and Φ -Sobolev inequalities », *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004), no. 2, p. 325–363. 3.2.1, 3.2.5
- [Che] M.-F. CHEN – « Speed of stability for birth-death processes », arxiv. 1.5
- [CMCV03] J. A. CARRILLO, R. J. MC-CANN et C. VILLANI – « Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates », *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003), no. 3, p. 971–1018. 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.3

- [CMCV06] — , « Contractions in the 2-Wasserstein length space and thermalization of granular media », *Arch. Rational Mech. Anal.* **179** (2006), no. 2, p. 217–263. 2.2
- [CP] S. CHATTERJEE et S. PAL – « A combinatorial analysis of interacting diffusions », *Journal of Theoretical Probability* (à paraître), DOI. 2.3.2
- [CP10] — , « A phase transition behavior for brownian motions interacting through their ranks », *Probab. Theory Related Fields* **147** (2010), no. 1-2, p. 123–159. 2.3.2
- [Dav84] M. H. A. DAVIS – « Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models », *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **46** (1984), no. 3, p. 353–388, With discussion. 1.5
- [Dav93] — , *Markov models and optimization*, Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 49, Chapman & Hall, London, 1993. 4.1.1
- [Daw83] D. A. DAWSON – « Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior », *J. Statist. Phys.* **31** (1983), no. 1, p. 29–85. 2
- [DGR02] V. DUMAS, F. GUILLEMIN et P. ROBERT – « A Markovian analysis of additive-increase multiplicative-decrease algorithms », *Adv. in Appl. Probab.* **34** (2002), no. 1, p. 85–111. 4.1
- [DM04] P. DEL MORAL – *Feynman-Kac formulae*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 2004, Genealogical and interacting particle systems with applications. 2.0.1
- [DMG99] P. DEL MORAL et A. GUIONNET – « On the stability of measure valued processes with applications to filtering », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 5, p. 429–434. 2.0.1
- [DMLM03] P. DEL MORAL, M. LEDOUX et L. MICLO – « On contraction properties of Markov kernels », *Probab. Theory Related Fields* **126** (2003), no. 3, p. 395–420. 3.2
- [DMM00] P. DEL MORAL et L. MICLO – « Branching and interacting particle systems approximations of Feynman-Kac formulae with applications to non-linear filtering », *Séminaire de Probabilités, XXXIV, Lecture Notes in Math.*, vol. 1729, Springer, Berlin, 2000, p. 1–145. 2.0.1
- [DMR10] P. DEL MORAL et E. RIO – « Concentration Inequalities for Mean Field Particle Models », *Annals of Applied Probability* (à paraître) HAL, 2010. 2.0.1
- [dSY05] B. DE SAPORTA et J.-F. YAO – « Tail of a linear diffusion with Markov switching », *Ann. Appl. Probab.* **15** (2005), no. 1B, p. 992–1018. 4.3.4
- [DV01] L. DESVILLETES et C. VILLANI – « On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation », *Comm. Pure Appl. Math.* **54** (2001), no. 1, p. 1–42. 2.4
- [EO05] R. ERBAN et H. G. OTHMER – « From signal transduction to spatial pattern formation in *E. coli* : A paradigm for multiscale modeling in biology », *Multiscale Model. Simul.*, **3** (2005), no. 2, p. 362–394 (electronic). 4.2
- [Gen08] I. GENTIL – « From the Prékopa-Leindler inequality to modified logarithmic Sobolev inequality », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **17** (2008), no. 2, p. 291–308. 1.2
- [GGM05] I. GENTIL, A. GUILLIN et L. MICLO – « Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities », *Probab. Theory Related Fields* **133** (2005), no. 3, p. 409–436. 1.2

- [GGM07] — , « Modified logarithmic Sobolev inequalities in null curvature », *Rev. Mat. Iberoam.* **23** (2007), no. 1, p. 235–258. 1.2
- [GIY04] X. GUYON, S. IOVLEFF et J.-F. YAO – « Linear diffusion with stationary switching regime », *ESAIM Probab. Stat.* **8** (2004), p. 25–35 (electronic). 4.3, 4.3.4
- [Goz09] N. GOZLAN – « A characterization of dimension free concentration in terms of transportation inequalities », *Ann. Probab.* **37** (2009), no. 6, p. 2480–2498. 1.4
- [GR09] C. GRAHAM et P. ROBERT – « Interacting multi-class transmissions in large stochastic networks », *Ann. Appl. Probab.* **19** (2009), no. 6, p. 2334–2361. 4.1
- [Gro75] L. GROSS – « Logarithmic Sobolev inequalities », *Amer. J. Math.* **97** (1975), no. 4, p. 1061–1083. 1
- [GRZ04] F. GUILLEMIN, P. ROBERT et B. ZWART – « AIMD algorithms and exponential functionals », *Ann. Appl. Probab.* **14** (2004), no. 1, p. 90–117. 4.1
- [Hai05] M. HAIRER – « Coupling stochastic PDEs », XIVth International Congress on Mathematical Physics, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, p. 281–289. 1.3
- [HN04] F. HÉRAU et F. NIER – « Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential », *Arch. Rat. Mech. Anal.* **2** (2004), no. 171, p. 151–218. 2.4
- [HTa] S. HERRMANN et J. TUGAUT – « Self-stabilizing processes : uniqueness problem for stationary measures and convergence rate in the small noise limit », <http://www.iecn.u-nancy.fr/~herrmann/articles.php?lng=fr&pg=62>. 2, 2.5
- [HTb] — , « Stationary measures for self-stabilizing diffusions : asymptotic analysis in the small noise limit », <http://www.iecn.u-nancy.fr/~herrmann/articles.php?lng=fr&pg=62>. To appear in *Elect. Journ. Probab.* 2, 2.5
- [HT10] — , « Non uniqueness of stationary measures for self-stabilizing diffusions », *Stochastic Process. Appl.* **120** (2010), no. 7, p. 1011–1392. 2, 2.5
- [Hér07] F. HÉRAU – « Short and long time behavior of the Fokker-Planck equation in a confining potential and applications », *J. Funct. Anal.* **244** (2007), no. 1, p. 95–118. 2.4
- [JO10] A. JOULIN et Y. OLLIVIER – « Curvature, concentration, and error estimates for Markov chain Monte Carlo », *Ann. Probab.* **38** (2010), no. 6, p. 2418–2442. 1.5
- [Jou00] B. JOURDAIN – « Diffusion processes associated with nonlinear evolution equations for signed measures », *Methodol. Comput. Appl. Probab.* **2** (2000), no. 1, p. 69–91. 2.3, 2.3, 2.3.1
- [KK] V. KLEPSTYN et A. KURTZMANN – « Ergodicity of self-attracting motion », pré-publication disponible ici <http://www.iecn.u-nancy.fr/kurtzman/recherche.html>. 2.5
- [Kur10] A. KURTZMANN – « The ODE method for some self-interacting diffusions on \mathbb{R}^d », *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **46** (2010), no. 3, p. 618–643. 2.5
- [Las04] G. LAST – « Ergodicity properties of stress release, repairable system and workload models », *Adv. in Appl. Probab.* **36** (2004), no. 2, p. 471–498. 1.5
- [Led99] M. LEDOUX – « Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities », Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216. 1.4
- [Led01] — , *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. 1.4

- [LM09] V. LEMAIRE et S. MENOZZI – « On some non asymptotic bounds for the Euler scheme », preprint, 2009. 3.1
- [LSU68] O. LADYZENSKAYA, V. SOLONNIKOV et N. URAL'CEVA – *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, vol. 23, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, 1968. 1.1
- [MT09] S. MEYN et R. L. TWEEDIE – *Markov chains and stochastic stability*, second éd., Cambridge University Press, Cambridge, 2009, With a prologue by Peter W. Glynn. (document)
- [MZ09] K. MAULIK et B. ZWART – « An extension of the square root law of TCP », *Ann. Oper. Res.* **170** (2009), p. 217–232. 4.1
- [Nor97] J. NORRIS – *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1997. 4.3
- [ODA88] H. G. OTHMER, S. R. DUNBAR et W. ALT – « Models of dispersal in biological systems », *J. Math. Biol.* **26** (1988), no. 3, p. 263–298. 4.2
- [OK08] T. J. OTT et J. H. B. KEMPERMAN – « Transient behavior of processes in the TCP paradigm », *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **22** (2008), no. 3, p. 431–471. 4.1
- [OS07] T. J. OTT et J. SWANSON – « Asymptotic behavior of a generalized TCP congestion avoidance algorithm », *J. Appl. Probab.* **44** (2007), no. 3, p. 618–635. 4.1
- [Ott06] T. J. OTT – « Rate of convergence for the ‘square root formula’ in the internet transmission control protocol », *Adv. in Appl. Probab.* **38** (2006), no. 4, p. 1132–1154. 4.1
- [OV00] F. OTTO et C. VILLANI – « Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality », *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400. 1.3.3, 1.3
- [Pin64] M. S. PINSKER – *Information and information stability of random variables and processes*, Translated and edited by Amiel Feinstein, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964. 1.3
- [PP08] S. PAL et J. PITMAN – « One-dimensional Brownian particle systems with rank-dependent drifts », *Ann. Appl. Probab.* **18** (2008), no. 6, p. 2179–2207. 2.3.2
- [Rob03] P. ROBERT – *Stochastic networks and queues*, french éd., Applications of Mathematics (New York), vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Stochastic Modelling and Applied Probability. 4.2
- [Rou06] M. ROUSSET – « On the control of an interacting particle estimation of Schrödinger ground states », *SIAM J. Math. Anal.* **38** (2006), no. 3, p. 824–844 (electronic). 2.0.1
- [Roy99] G. ROYER – *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*, Cours Spécialisés, vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1999. 1.1
- [Szn91] A.-S. SZNITMAN – « Topics in propagation of chaos », *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math.*, vol. 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251. 2
- [Tal96a] M. TALAGRAND – « Transportation cost for Gaussian and other product measures », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 3, p. 587–600. 1.3
- [Tal96b] D. TALAY – « Probabilistic numerical methods for partial differential equations : elements of analysis », *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Lecture Notes in Math.*, vol. 1627, Springer, Berlin, 1996, p. 148–196. 3.1

- [Tal02] D. TALAY – « Stochastic Hamiltonian systems : exponential convergence to the invariant measure, and discretization by the implicit Euler scheme », *Markov Process. Related Fields* **8** (2002), no. 2, p. 163–198, Inhomogeneous random systems (Cergy-Pontoise, 2001). 2.4
- [Tam84] Y. TAMURA – « On asymptotic behaviors of the solution of a nonlinear diffusion equation », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **31** (1984), no. 1, p. 195–221. 2
- [TT90] D. TALAY et L. TUBARO – « Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations », *Stochastic Anal. Appl.* **8** (1990), no. 4, p. 483–509 (1991). 3.1, 3.1.1
- [Vil03] C. VILLANI – *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. 1.3
- [Vil09] — , « Hypocoercivity », *Mem. Amer. Math. Soc.* **202** (2009), no. 950, p. iv+141. 2.4
- [Wu01] L. WU – « Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems », *Stochastic Process. Appl.* **91** (2001), no. 2, p. 205–238. 2.4