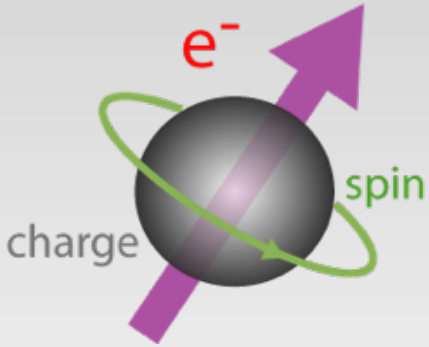
Qu'est-ce que le spin?

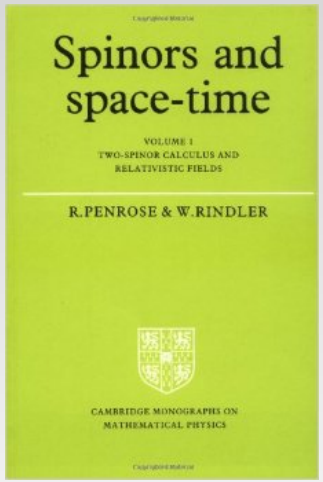
Toupies quantiques et Particules élémentaires

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique

Xavier BEKAERT

18 février 2015





Qu'est-ce que le spin?

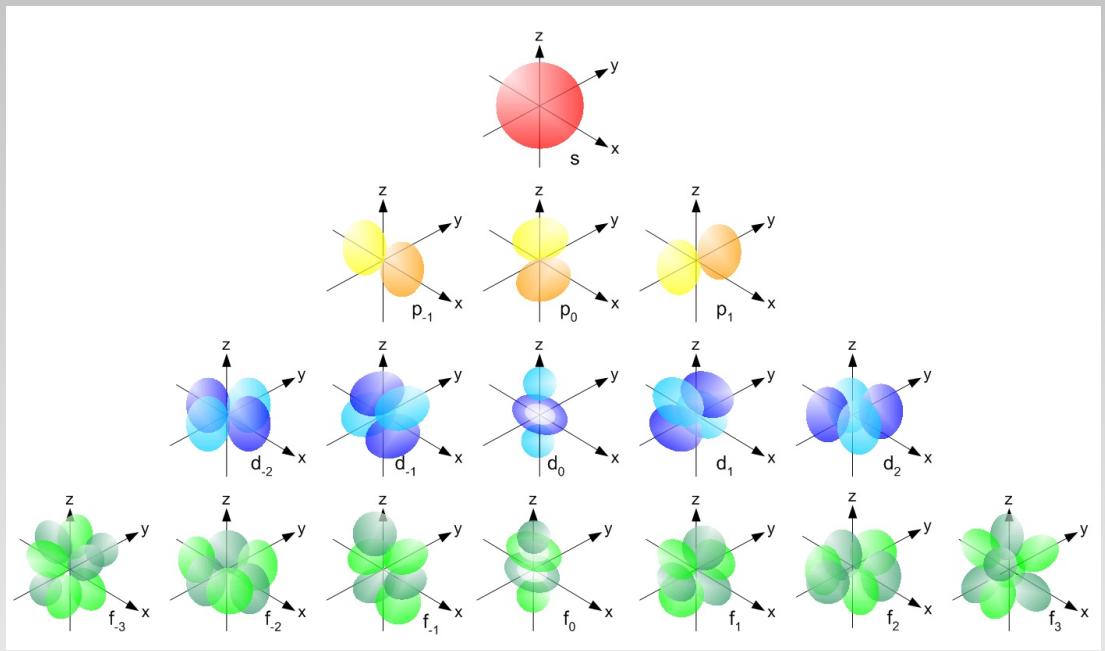
"to spin" = Tournoyer

1. Moment angulaire intrinsèque

Qu'est-ce que le spin?

"to spin" = Tournoyer

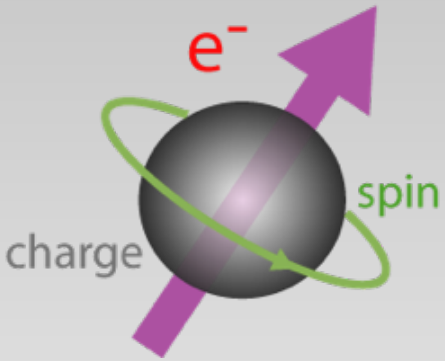
1. Moment angulaire intrinsèque
2. Atomes quantiques et moment angulaire orbital



Qu'est-ce que le spin?

"to spin" = Tournoyer

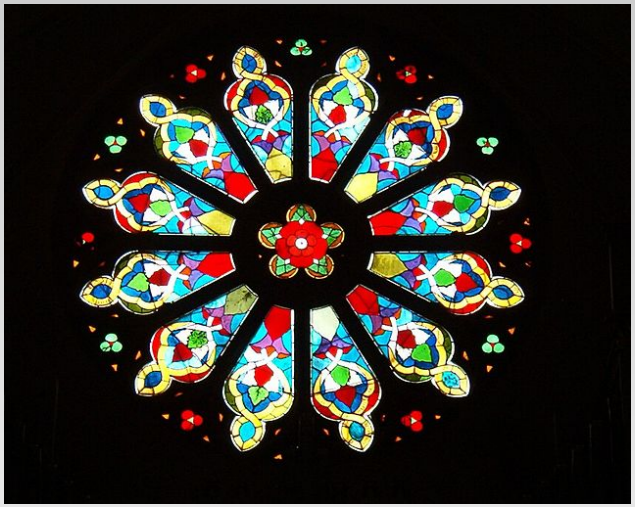
1. Moment angulaire intrinsèque
2. Atomes quantiques et moment angulaire orbital
3. Toupies quantiques et moment angulaire intrinsèque



Qu'est-ce que le spin?

"to spin" = Tournoyer

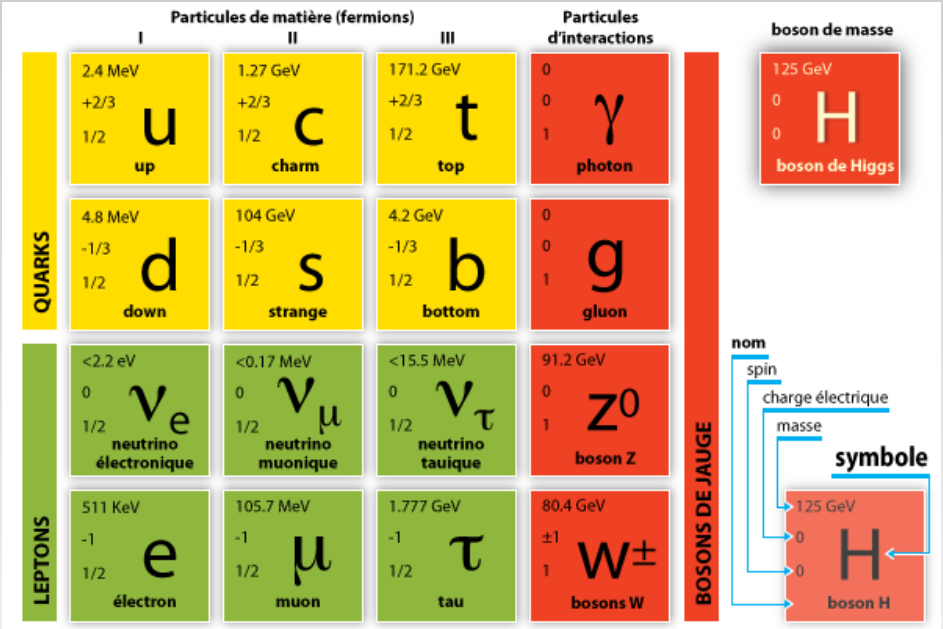
1. Moment angulaire intrinsèque
2. Atomes quantiques et moment angulaire orbital
3. Toupies quantiques et moment angulaire intrinsèque
4. Symétries de rotation et spin



Qu'est-ce que le spin?

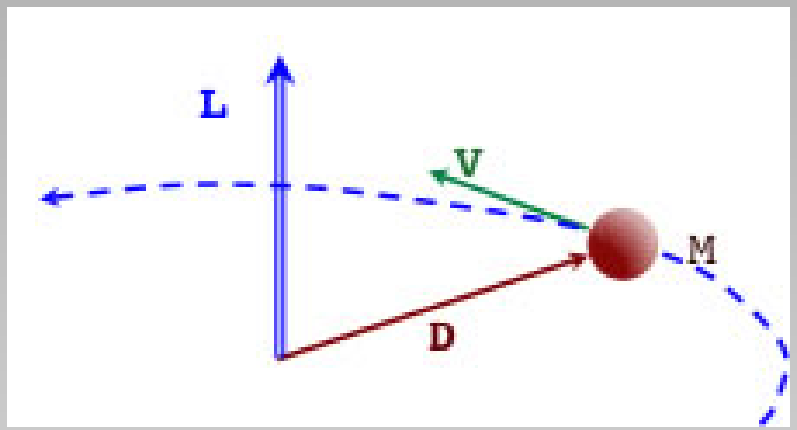
"to spin" = Tournoyer

1. Moment angulaire intrinsèque
2. Atomes quantiques et moment angulaire orbital
3. Toupies quantiques et moment angulaire intrinsèque
4. Symétries de rotation et spin
5. Particules élémentaires et symétries



Moment angulaire intrinsèque

Moment angulaire en mécanique classique



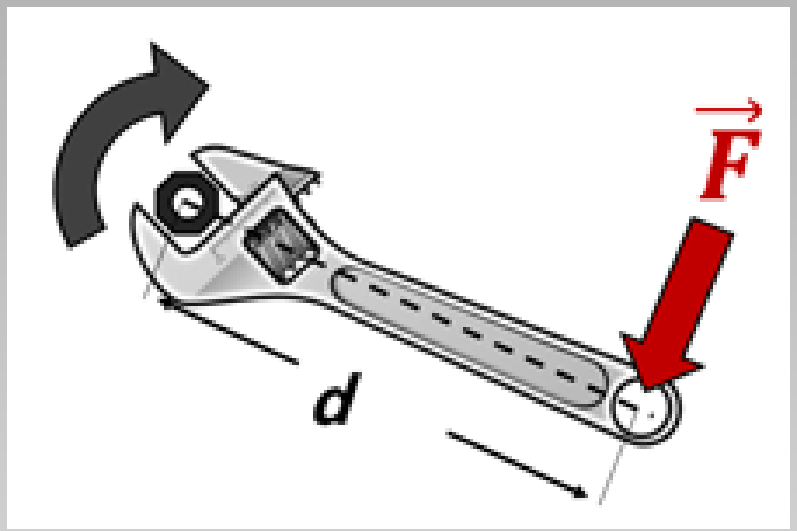
Moment angulaire (ou **Moment cinétique**)

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} \times \mathbf{P}$$

où

- D = Distance à l'axe de roation
- $\mathbf{P} = M\,\mathbf{V}$ = Quantité de mouvement (ou **Impulsion** ou **Moment linéaire**)

Moment angulaire en mécanique classique



Moment de force

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$$

où

- d = Distance à l'axe de roation = Bras de levier
- $\mathbf{F}$ = Force

Moment angulaire en mécanique classique

Conservation du moment angulaire en mécanique classique

(en l'absence de moment de force)

Exemples:

- Toupie

Conservation du moment angulaire en mécanique classique

(en l'absence de moment de force)

Exemples:

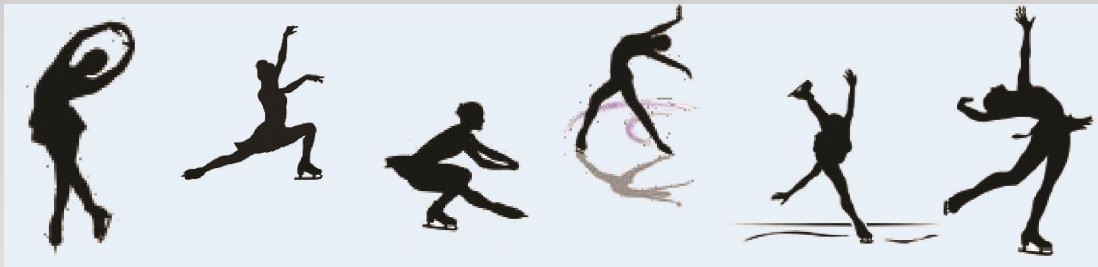
- Toupie
- Roue de vélo

Conservation du moment angulaire en mécanique classique

(en l'absence de moment de force)

Exemples:

- Toupie
- Roue de vélo
- Patinage sur glace

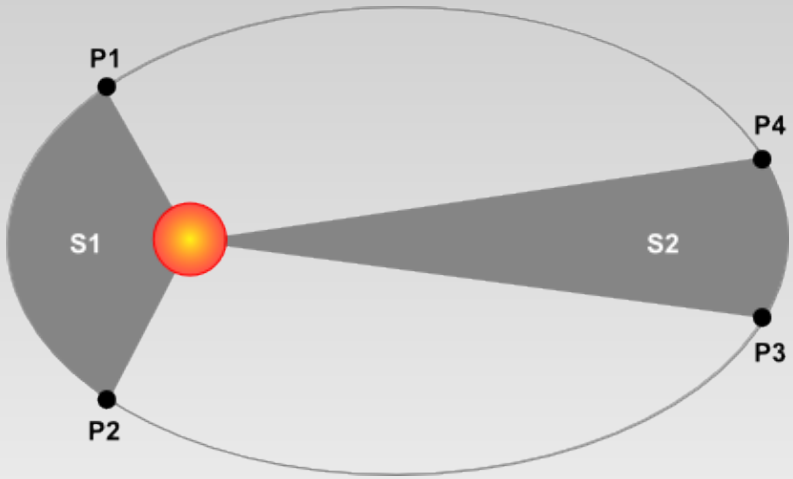


Conservation du moment angulaire en mécanique classique

(en l'absence de moment de force)

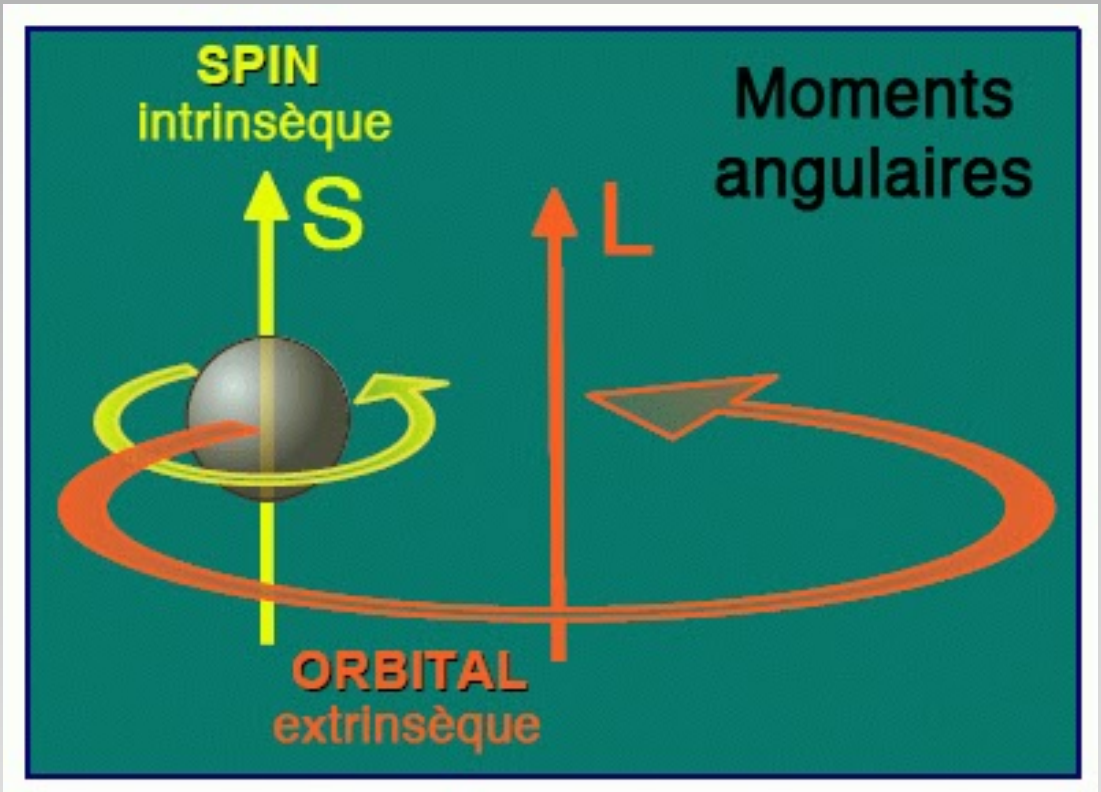
Exemples:

- Toupie
- Roue de vélo
- Patinage sur glace
- Système solaire



2ème loi de Kepler: loi des aires

Moments angulaires en mécanique classique

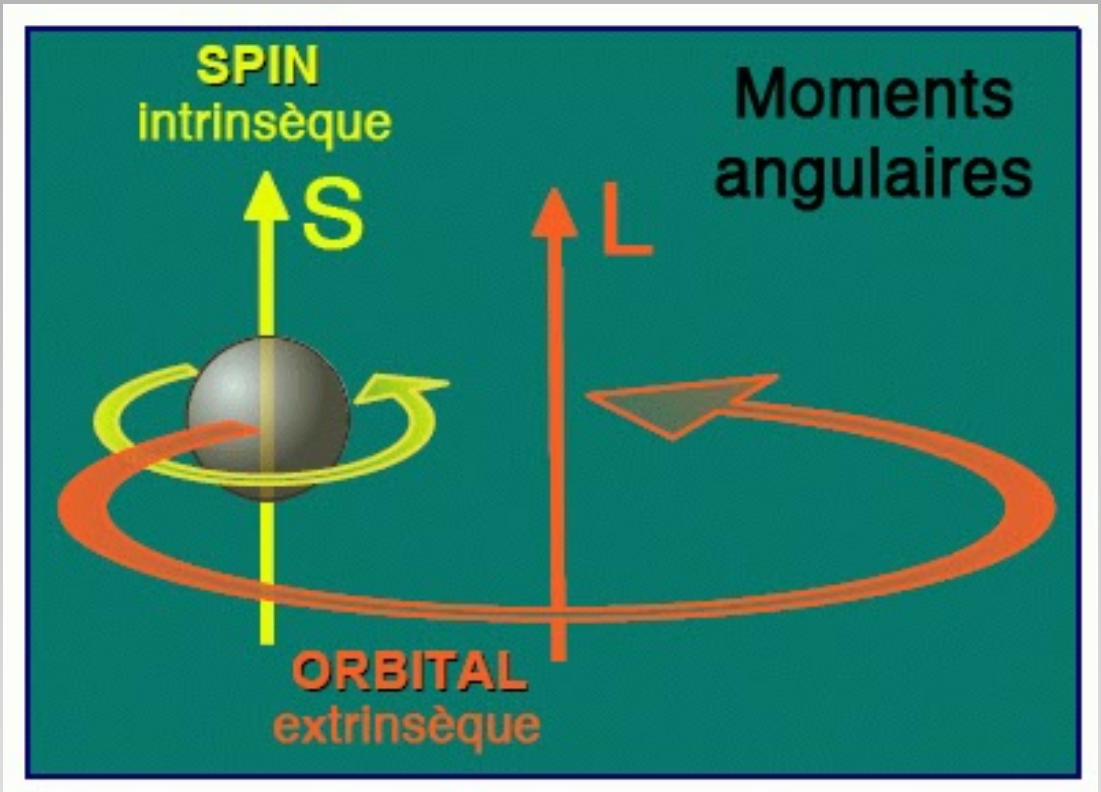


Moments angulaires

Total = Orbital + Intrinsèque

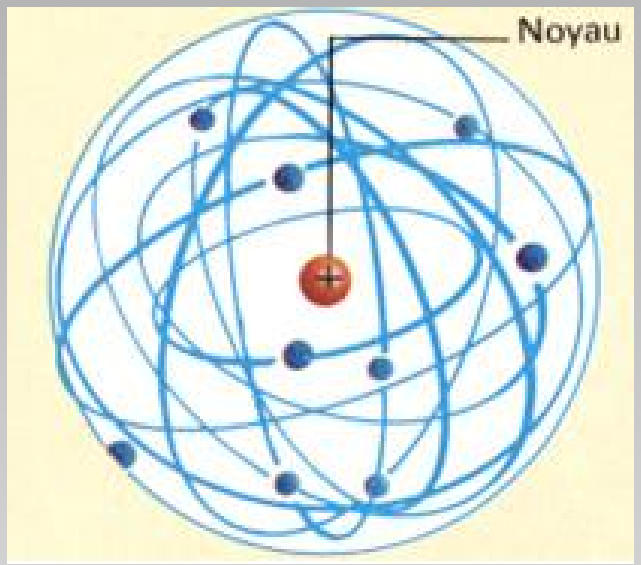
$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

Moments angulaires en mécanique classique



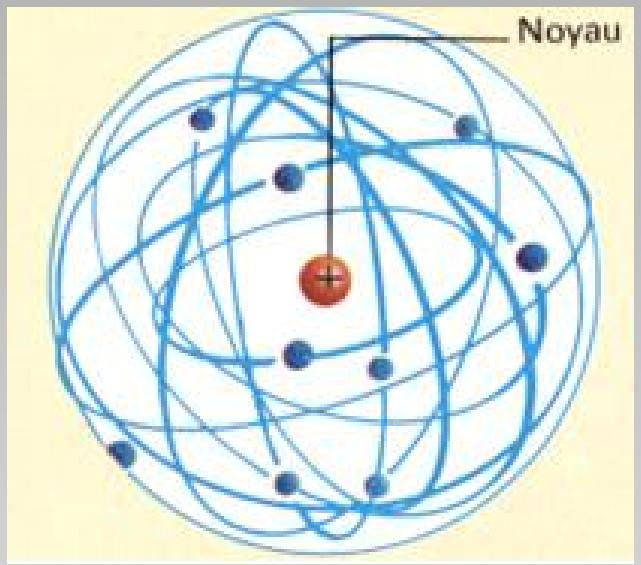
Exemple (système solaire):
La Terre tourne autour du soleil (moment angulaire orbital) mais elle tourne aussi sur elle-même (moment angulaire intrinsèque).

Moments angulaires en mécanique quantique



Métaphore (modèle de Rutherford):
Un électron "tourne" autour du noyau (moment angulaire orbital) et "tourne" aussi sur lui-même (moment angulaire intrinsèque = spin).

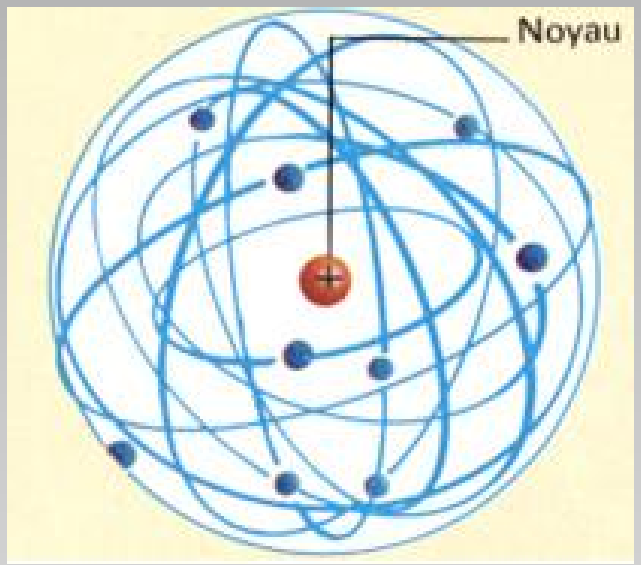
Moments angulaires en mécanique quantique



Métaphore (modèle de Rutherford):
Un électron "tourne" autour du noyau (moment angulaire orbital) et "tourne" aussi sur lui-même (moment angulaire intrinsèque = spin).

Question: Comment peut-on mesurer de tels moment angulaires d'échelle atomique?

Moments angulaires en mécanique quantique



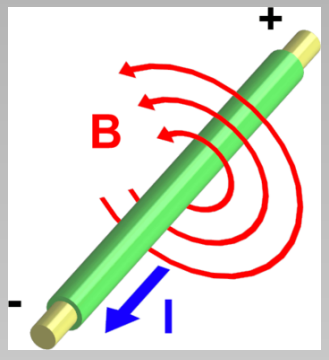
Métaphore (modèle de Rutherford):
Un électron "tourne" autour du noyau (moment angulaire orbital) et "tourne" aussi sur lui-même (moment angulaire intrinsèque = spin).

Question: Comment peut-on mesurer de tels moment angulaires d'échelle atomique?

Réponse: Par une mesure de moment magnétique.

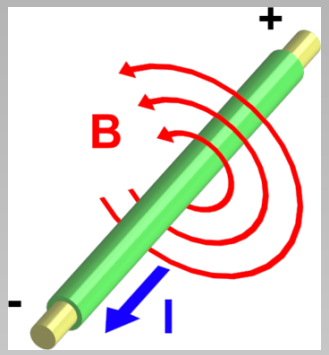
Moment magnétique en mécanique classique

Le mouvement de charges électriques crée un champ magnétique.

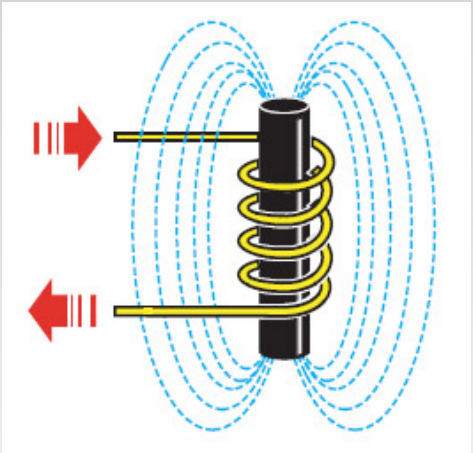


Moment magnétique en mécanique classique

Le mouvement de charges électriques crée un champ magnétique.

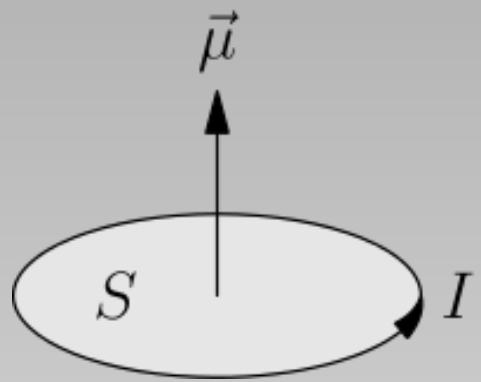


En particulier, le mouvement circulaire de charges électriques crée un champ magnétique dipolaire semblable à celui d'un aimant (deux pôles: nord et sud).



Moments magnétiques en mécanique classique

Le moment magnétique est une mesure de l'aimantation.



Moment magnétique orbital
d'une boucle de courant circulaire

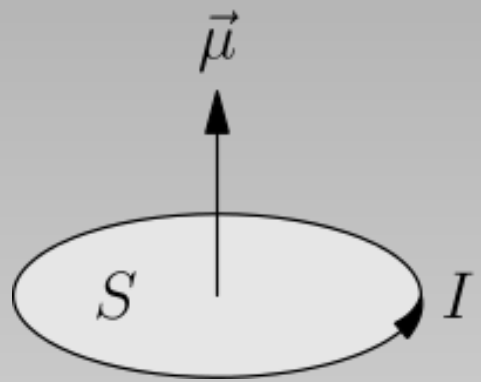
$$\mu_L = I \times S$$

où

- I = courant électrique
- S = aire du disque formé par la boucle de courant

Moments magnétiques en mécanique classique

Le moment magnétique est une mesure de l'"aimantation".



Moment magnétique orbital
d'une charge en mouvement circulaire

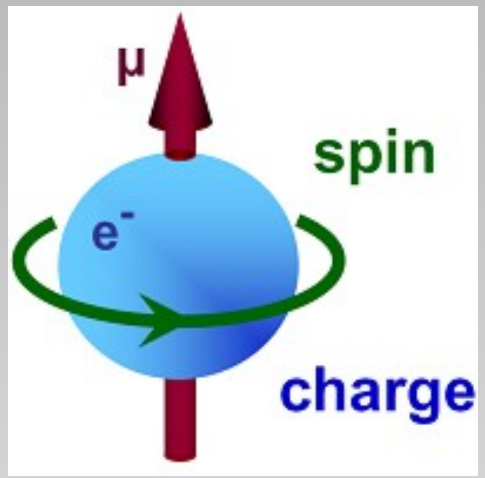
$$\mu_L = \frac{Q}{2M} L$$

où la particule est charactérisée par

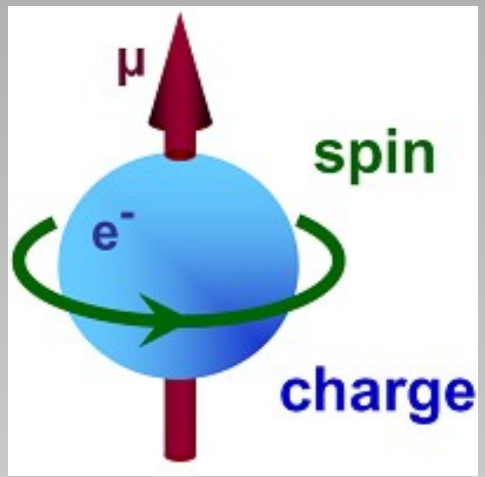
- Q = Charge électrique
- M = Masse
- L = Moment angulaire orbital

Moment magnétique de l'électron

Si l'électron est modélisé par une boule en rotation chargée électriquement alors il est naturel de s'attendre à ce qu'il possède un moment magnétique.



Moment magnétique de l'électron



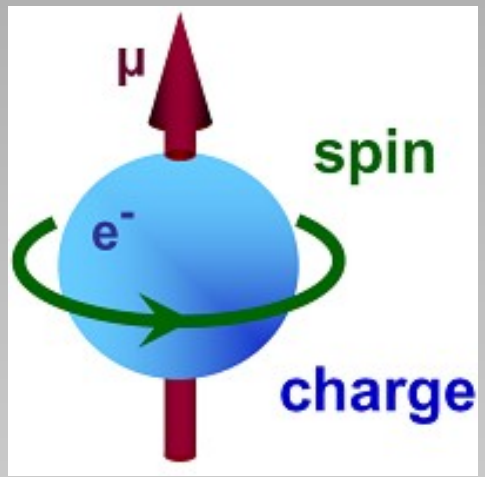
Moment magnétique intrinsèque
d'une boule chargée en rotation

$$\mu_S = \frac{Q}{2M} S$$

où la particule est charactérisée par

- Q = Charge électrique
- M = Masse
- S = Moment angulaire intrinsèque

Moment magnétique de l'électron



Moment magnétique intrinsèque
d'une particule chargée

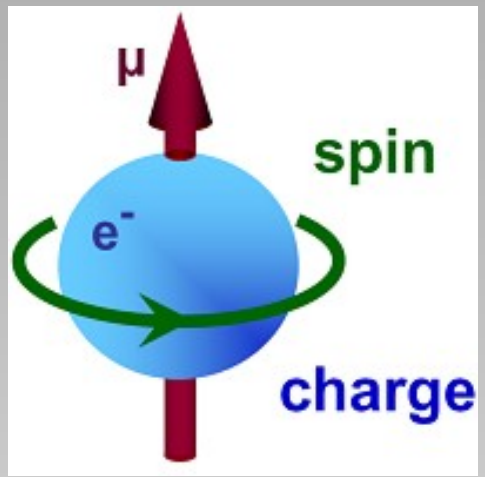
$$\mu_S = g \frac{Q}{2M} S$$

où g = Facteur de Landé.

En mécanique quantique,

- g est génériquement $\neq 1$
- $Q = 0 \not\Rightarrow \mu_S = 0$ (exemple: neutron)

Moment magnétique de l'électron



Conclusion: Le modèle d'un électron comme une boule chargée en rotation sur elle-même est au mieux une métaphore.

Ceci est aussi mis en évidence par

- l'expérience de Stern & Gerlach (1922)
- son explication en terme de moment angulaire intrinsèque quantifié introduit par Goudsmit & Uhlenbeck (1925)

Qu'est-ce que le spin d'un électron?

En mécanique quantique on doit attribuer à une particule élémentaire un certain moment angulaire "intrinsèque" non lié à son mouvement dans l'espace. (...) Il serait absolument dénué de sens de se représenter le moment angulaire "intrinsèque" d'une particule élémentaire comme le résultat de la rotation "autour de son axe".

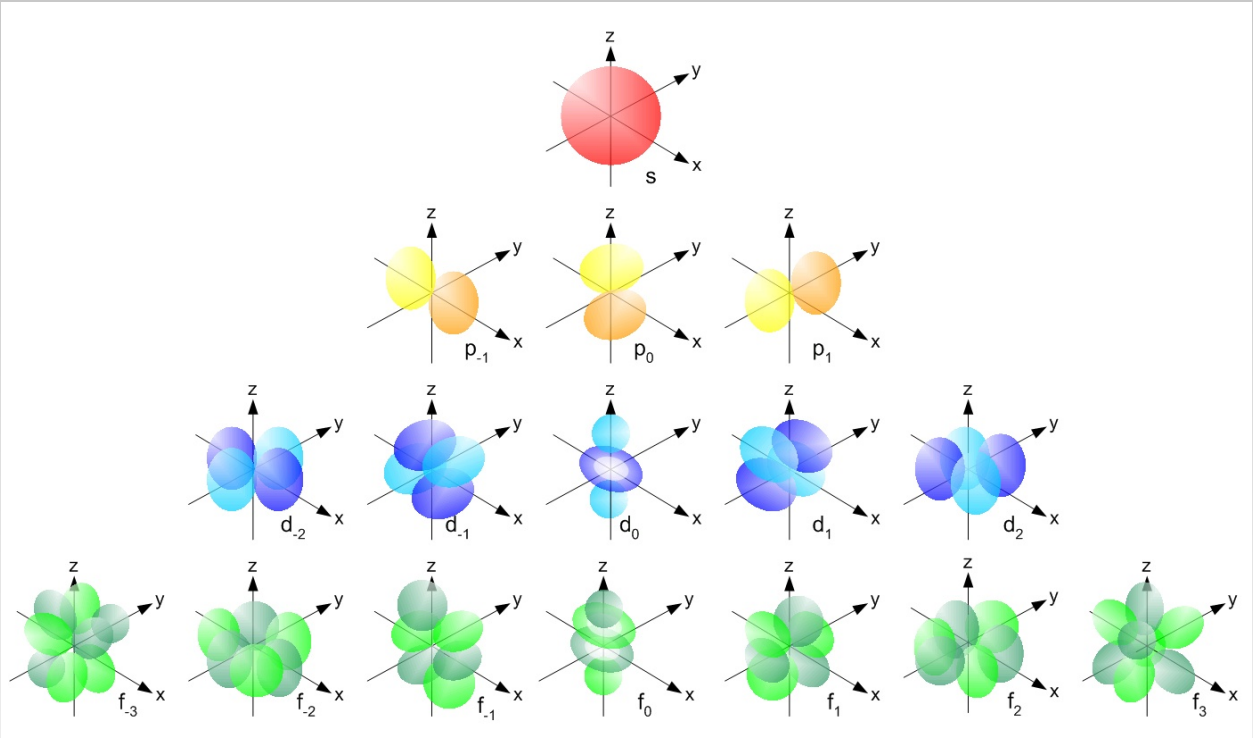
Evgeny Lifshitz (1915-1985) et Lev Landau (1908-1968, prix Nobel 1962)

Moments angulaires en mécanique quantique

Conclusions:

- Le modèle d'un électron comme une boule chargée en rotation sur elle-même est au mieux une métaphore.
- Pour tenter de répondre à la question "qu'est-ce que le spin?", il faut d'abord comprendre ce que devient le moment angulaire en mécanique quantique.

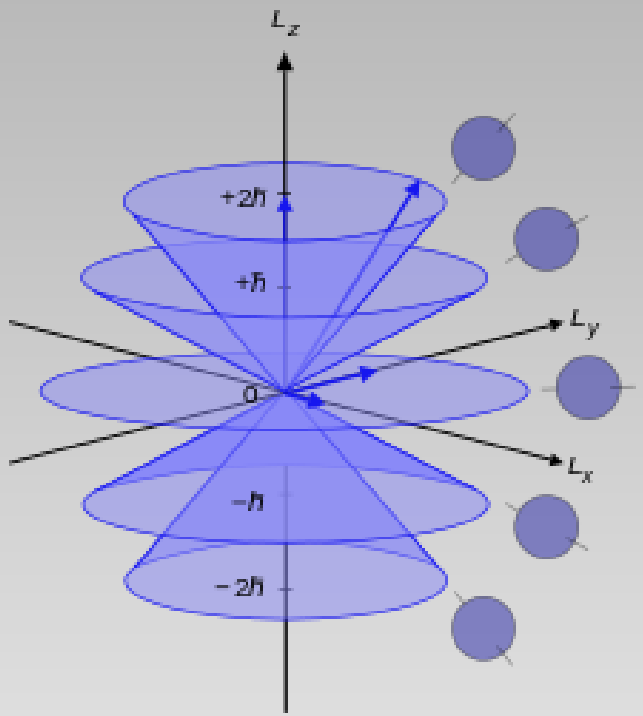
Atomes quantiques
et
moment angulaire orbital



Moment angulaire orbital en mécanique quantique

En mécanique quantique, le moment angulaire est “quantifié”:

- **Moment angulaire orbital** (multiples de $\hbar$)



Métaphore du point tournant

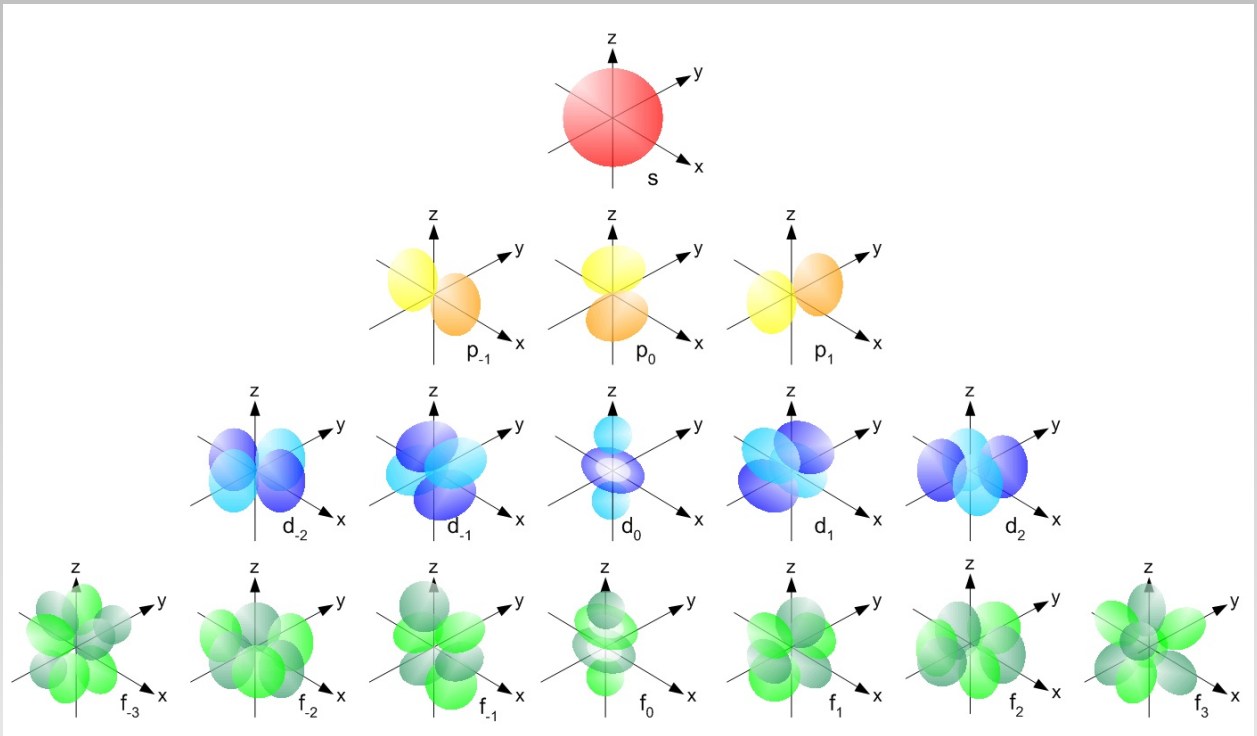
$$L_z = m\,\hbar \qquad m \in \{-\ell, -\ell+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \ell-1, \ell\}$$

$$\mathbf{L}^2 = \ell(\ell+1)\,\hbar^2 \qquad \ell = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

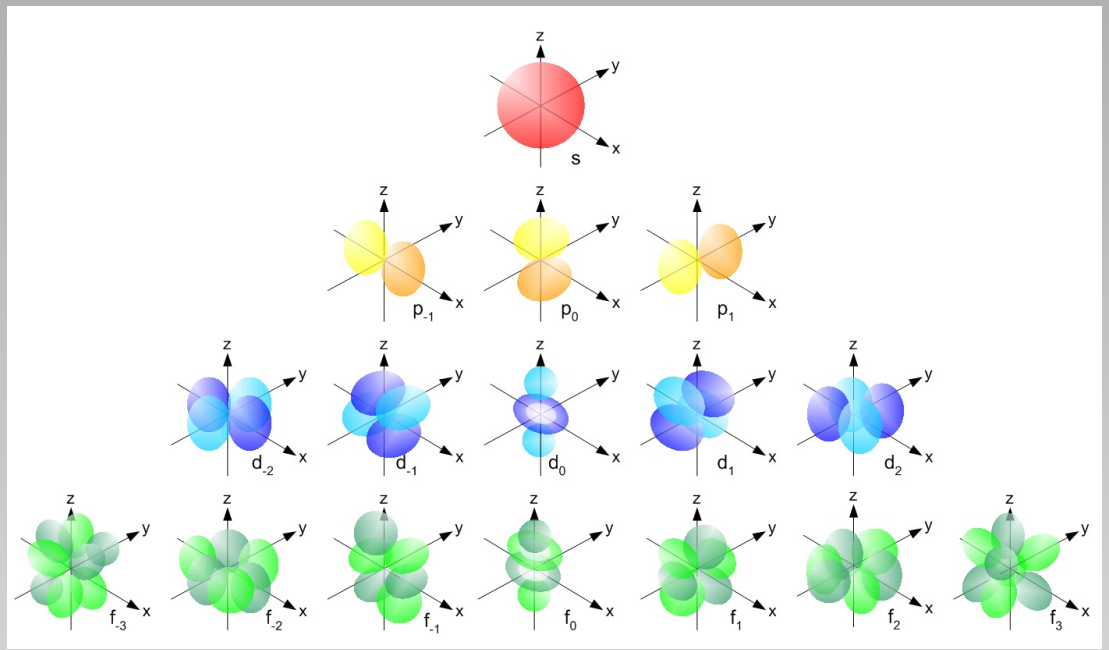
Orbitale atomique d'un seul électron

La métaphore du point tournant est clairement une vision baroque incohérente du moment angulaire orbital en mécanique quantique.

L'électron vu comme point tournant autour du noyau doit être remplacé par l'orbitale atomique correspondante.



Orbitale atomique d'un seul électron



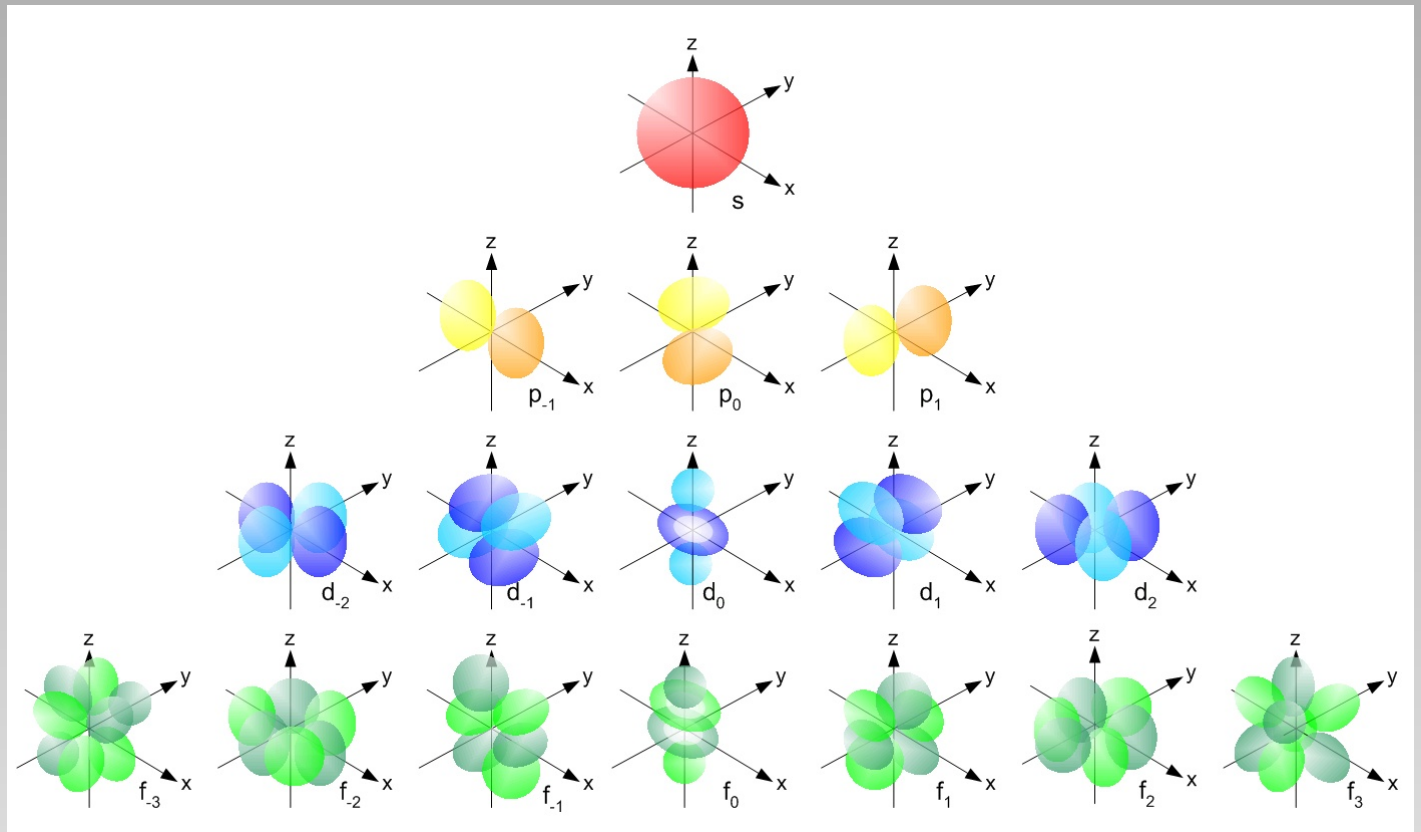
Orbitale atomique d'un seul électron

Labellée par deux **nombres quantiques** (entiers $\in \mathbb{Z}$)

- nombre quantique azimutal $\ell \in \mathbb{N}$
- nombre quantique magnétique m: $2\ell + 1$ valeurs possibles $-\ell \leqslant m \leqslant \ell$

$\Leftrightarrow$ Harmonique sphérique $Y_m^\ell(\theta, \phi)$

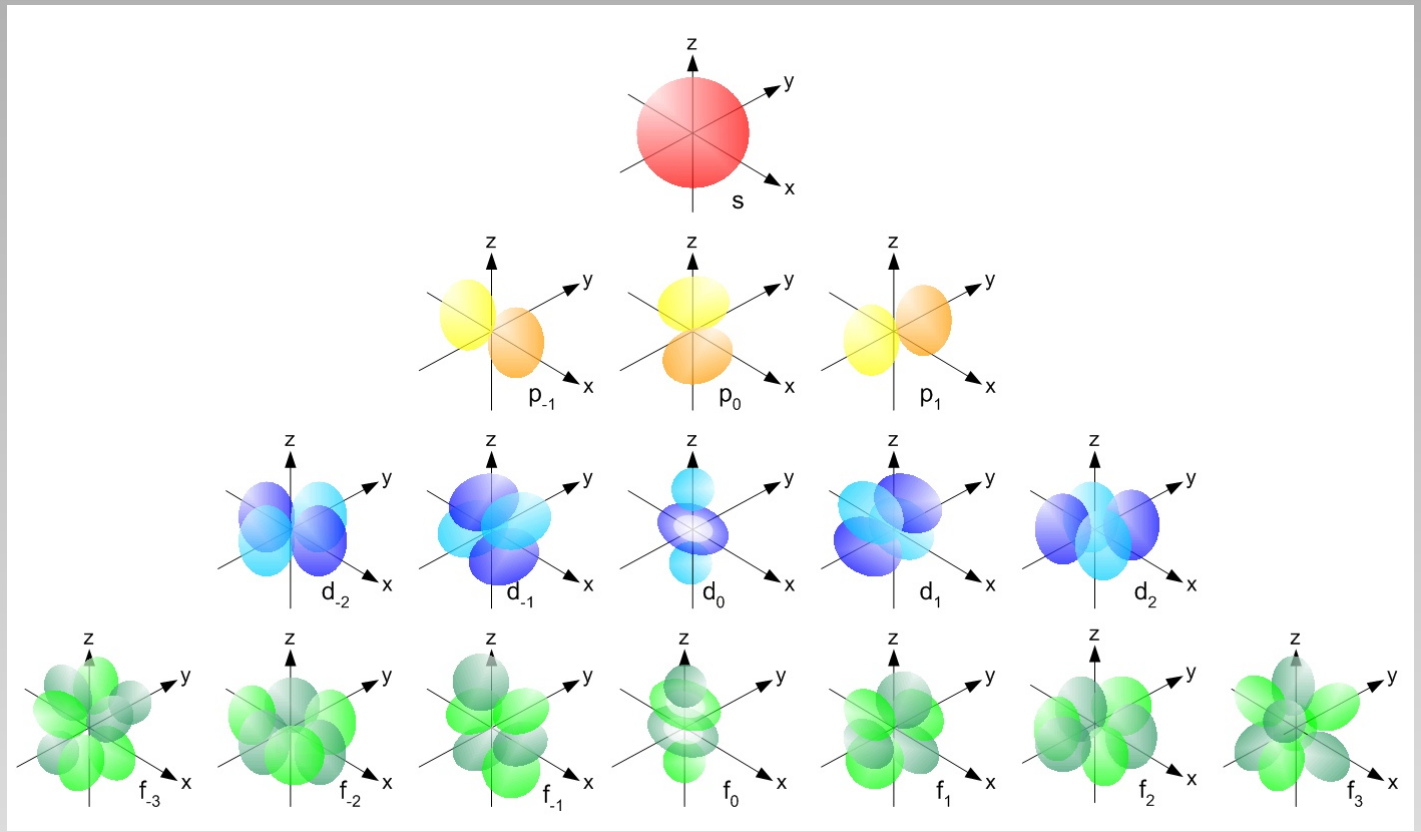
Orbitale atomique d'un seul électron



Orbitales et symétrie minimale sous les rotations autour d'un axe

- s ("simple") $\Leftrightarrow \ell = 0$: Rotations d'angle arbitraire
- p ("principale") $\Leftrightarrow \ell = 1$: Rotation d'un tour complet
- d ("diffuse") $\Leftrightarrow \ell = 2$: Rotation d'un demi-tour
- f ("fondamentale") $\Leftrightarrow \ell = 3$: Rotation d'un tiers de tour $(m = 3)$

Orbitale atomique d'un seul électron



Orbitales et symétrie sous les rotations

Des rotations autour de différents axes permutent les orbitales d'un même type ($\Leftrightarrow$ nombre quantique azimutal ℓ fixé)

Orbitale atomique d'un seul électron

Conclusions:
En mécanique quantique, le moment angulaire orbital est

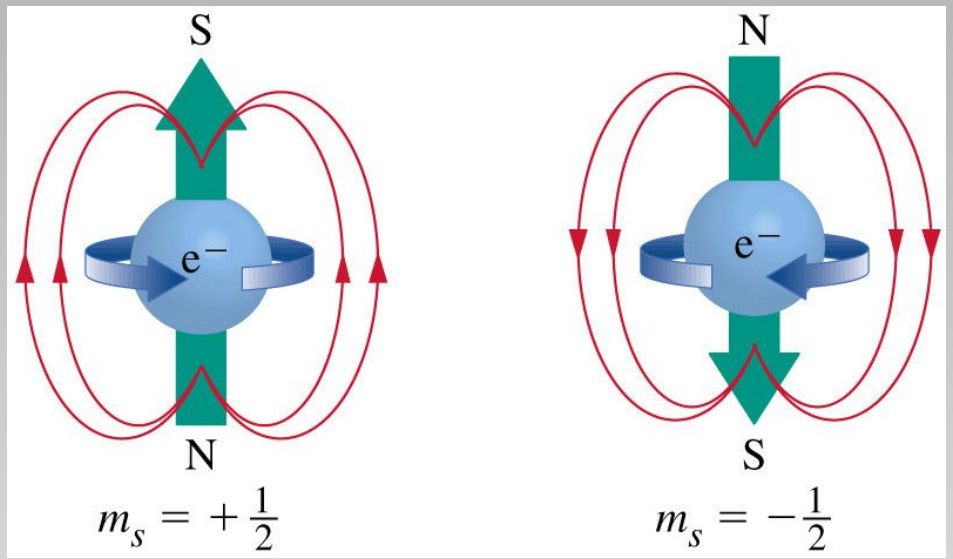
- quantifié (donc la métaphore du point tournant doit être abandonnée)
- associé
  - au nombre de valeurs possibles $2\ell + 1$ du nombre quantique magnétique m
  - à la symétrie sous les rotations d'un m-ème de tour (d'angle $\frac{360^\circ}{m}$)

Toupies quantiques
et
moment angulaire intrinsèque

Wolfgang Pauli et Niels Bohr

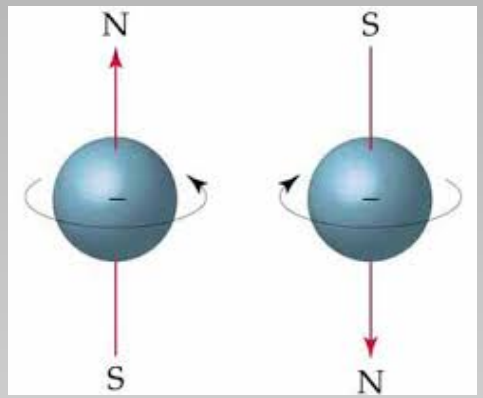
Moment magnétique intrinsèque de l'électron

L'expérience de Stern & Gerlach montre qu'un électron ne possède que deux valeurs possibles du moment magnétique intrinsèque selon un axe.



Spin de l'électron

L'expérience de Stern & Gerlach montre qu'un électron ne possède donc que deux valeurs possibles du spin selon un axe.



Spin $s = \frac{1}{2} \leftrightarrow$ 2 valeurs possibles de $s_z = \pm\frac{1}{2}$ (en "haut" ou en "bas")

Orbitale atomique d'un seul électron

Conclusions:
En mécanique quantique, le moment angulaire intrinsèque (= spin) est

- quantifié (donc la métaphore de la boule tournante doit être abandonnée)
- associé
  - au nombre de valeurs possibles $2s+1$ de la composante s_z
  - à la symétrie sous les rotations d'angle $\frac{360^\circ}{s_z}$?

Orbitale atomique d'un seul électron

Conclusions:
En mécanique quantique, le moment angulaire intrinsèque (= spin) est

- quantifié (donc la métaphore de la boule tournante doit être abandonnée)
- associé
  - au nombre de valeurs possibles $2s+1$ de la composante s_z
  - à la symétrie sous les rotations d'angle $\frac{360^\circ}{s_z}$?

  Si oui, un électron $s = \frac{1}{2}$ doit effectuer deux tours sur lui même (720°) pour revenir à sa configuration d'origine!

Symétries de rotation et spin

Groupe cyclique d'ordre 1

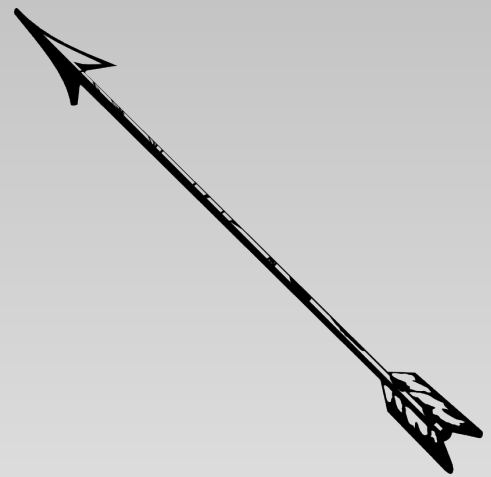
$\mathbb{Z}_1$ généré par une rotation d'un tour, c'est-à-dire la transformation identité

Exemple: Tout objet sans symétrie particulière

Groupe cyclique d'ordre 1

$\mathbb{Z}_1$ généré par une rotation d'un tour, c'est-à-dire la transformation identité

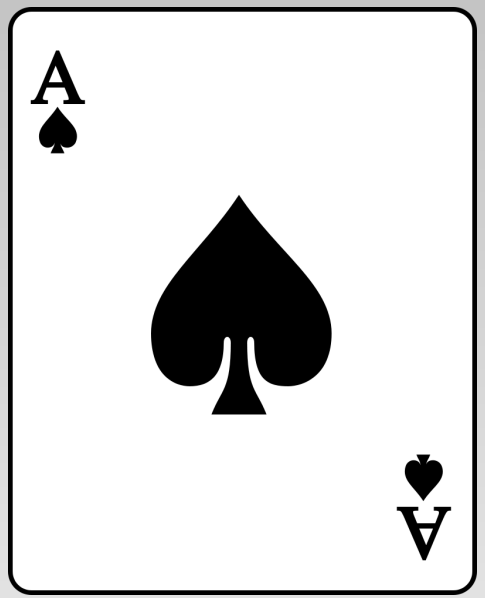
Exemple: Vecteur ("flèche") dans le plan



Groupe cyclique d'ordre 1

$\mathbb{Z}_1$ généré par une rotation d'un tour, c'est-à-dire la transformation identité

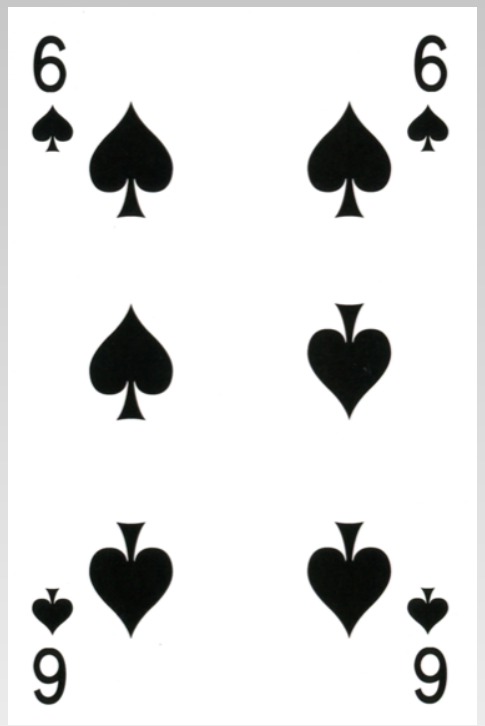
Exemple: Carte à jouer



Groupe cyclique d'ordre 2

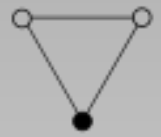
$\mathbb{Z}_2$ généré par une rotation d'un demi-tour

Exemple: Carte à jouer

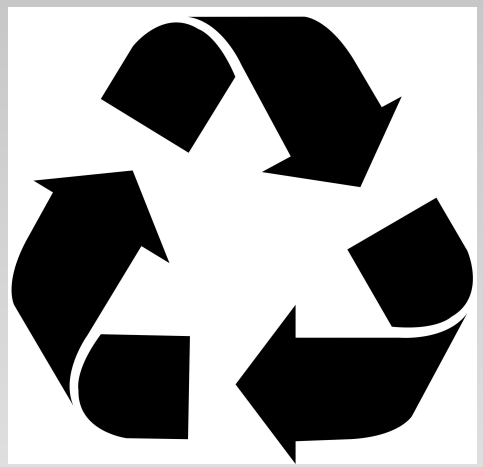


Groupe cyclique d'ordre 3

$\mathbb{Z}_3$ généré par une rotation d'un tiers de tour



Exemple: Symbole "recyclable"



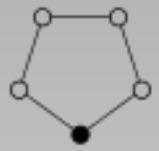
Groupe cyclique d'ordre 4

$\mathbb{Z}_4$ généré par une rotation d'un quart de tour

Exemple: Roquette jaune

Groupe cyclique d'ordre 5

$\mathbb{Z}_5$ généré par une rotation d'un 5ème de tour



Exemple: Aloe polyphylla

Groupe cyclique d'ordre 12

$\mathbb{Z}_{12}$ généré par une rotation d'un 12ème de tour

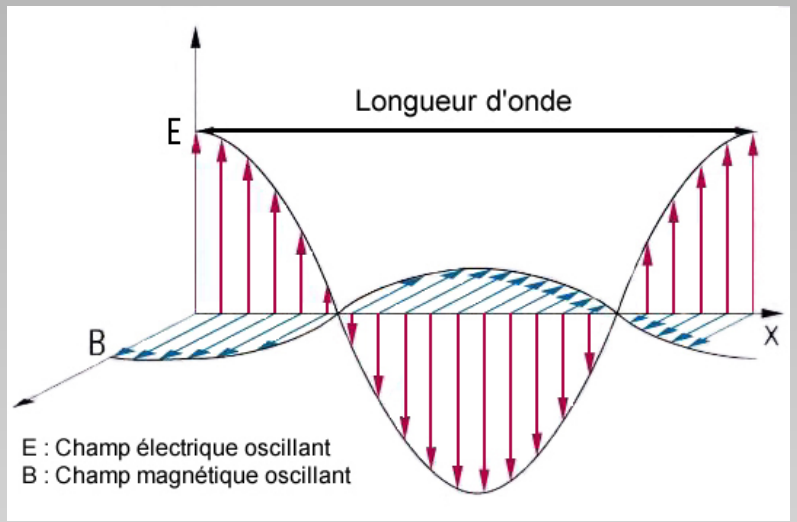
Exemple: Rosace (église Oscar Fredriks en Suède)

Symétries de rotation

Conclusion: La symétrie sous les rotations d'une fraction de tour est présente partout dans l'art et dans la nature.

Symétries de rotation

Exemple: Le photon est de spin 1. Il est décrit par le champ électromagnétique.



Les champs électriques et magnétiques sont des champs vectoriels. Un vecteur est laissée invariant par une rotation d'un tour complet.

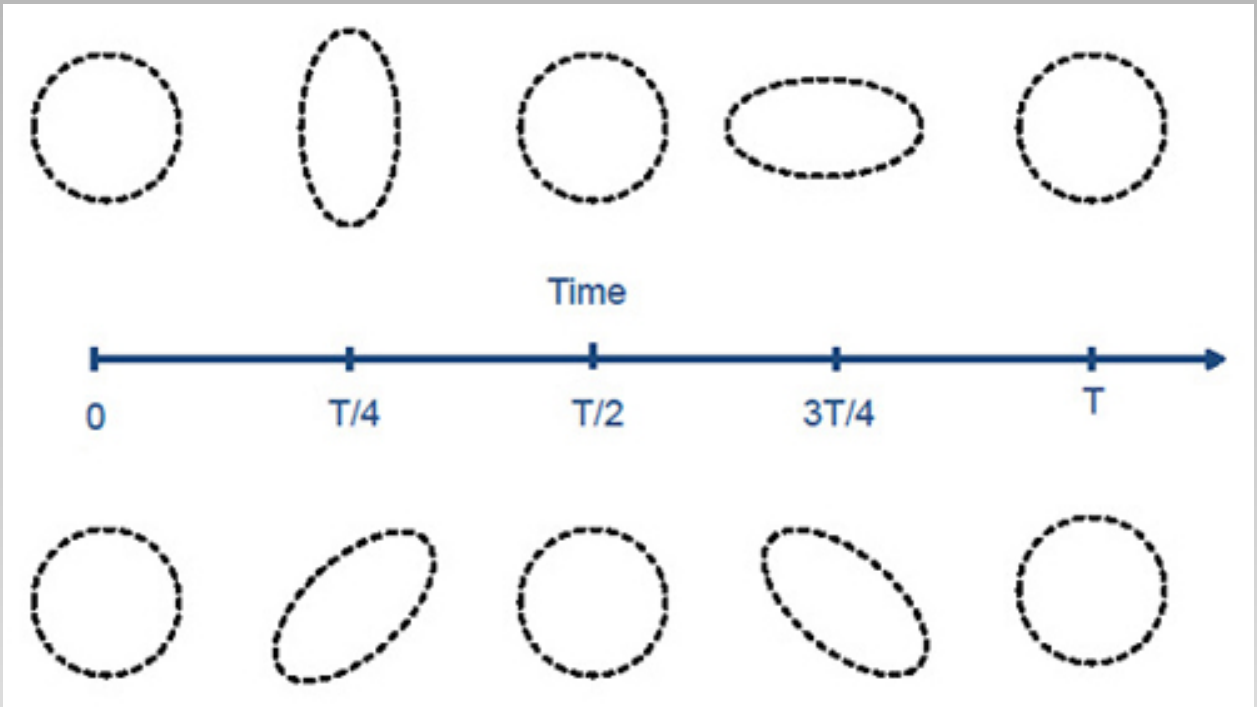
Symétries de rotation

Exemple: Le boson de Brout-Englert-Higgs est de spin 0. Il est décrit par un champ scalaire (tel le champ de température).

Une grandeur scalaire est laissée invariante pour une rotation d'angle quelconque (tel un point).

Symétries de rotation

Le graviton est de spin 2. C'est le médiateur de l'interaction gravitationnelle. Il est décrit par un champ tensoriel de rang 2.



Ses modes de polarisation sont laissés invariants par une rotation d'un demi-tour.

Symétries de rotation

Un **boson** est une particule de spin s entier (invariante sous le groupe cyclique d'ordre s engendré par une rotation d'angle $\frac{360^\circ}{s}$).

Exemples:

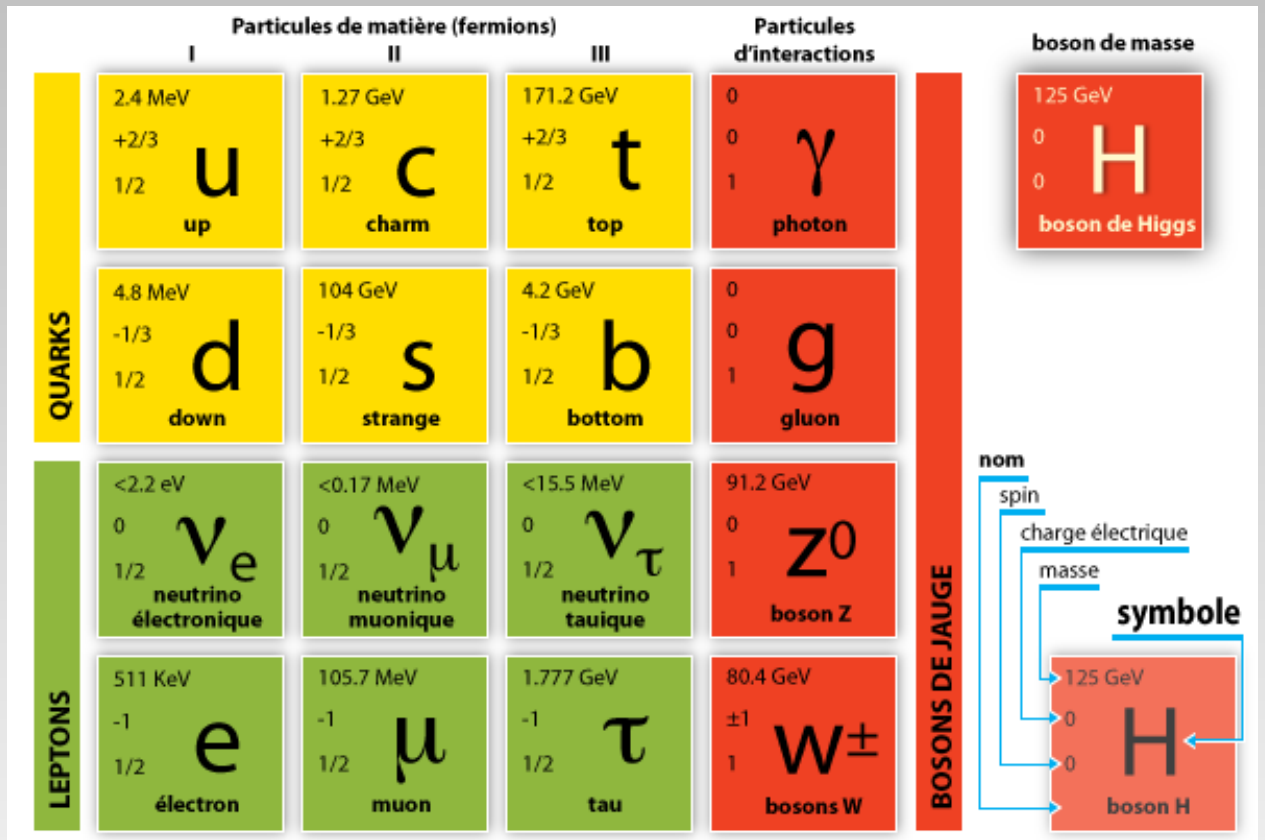
Particule (boson)	Champ	Grandeur	Spin (entier)	Rotation
Higgs	Scalaire	Scalaire	0	quelconque
Photon	Électromagnétique	Vecteur	1	1 tour
Graviton (?)	Gravitationnel	Tenseur	2	1/2 tour
??	??	Tenseur	s>2	$1/s_z$ tour

Bosons et fermions

Conclusion: Un boson est une particule de spin s entier et est décrit par un champ de grandeurs invariantes sous une rotation d'angle $\frac{360^\circ}{s_z}$.

Qu'en est-il des spins demi-entiers?

Particules élémentaires et symétries



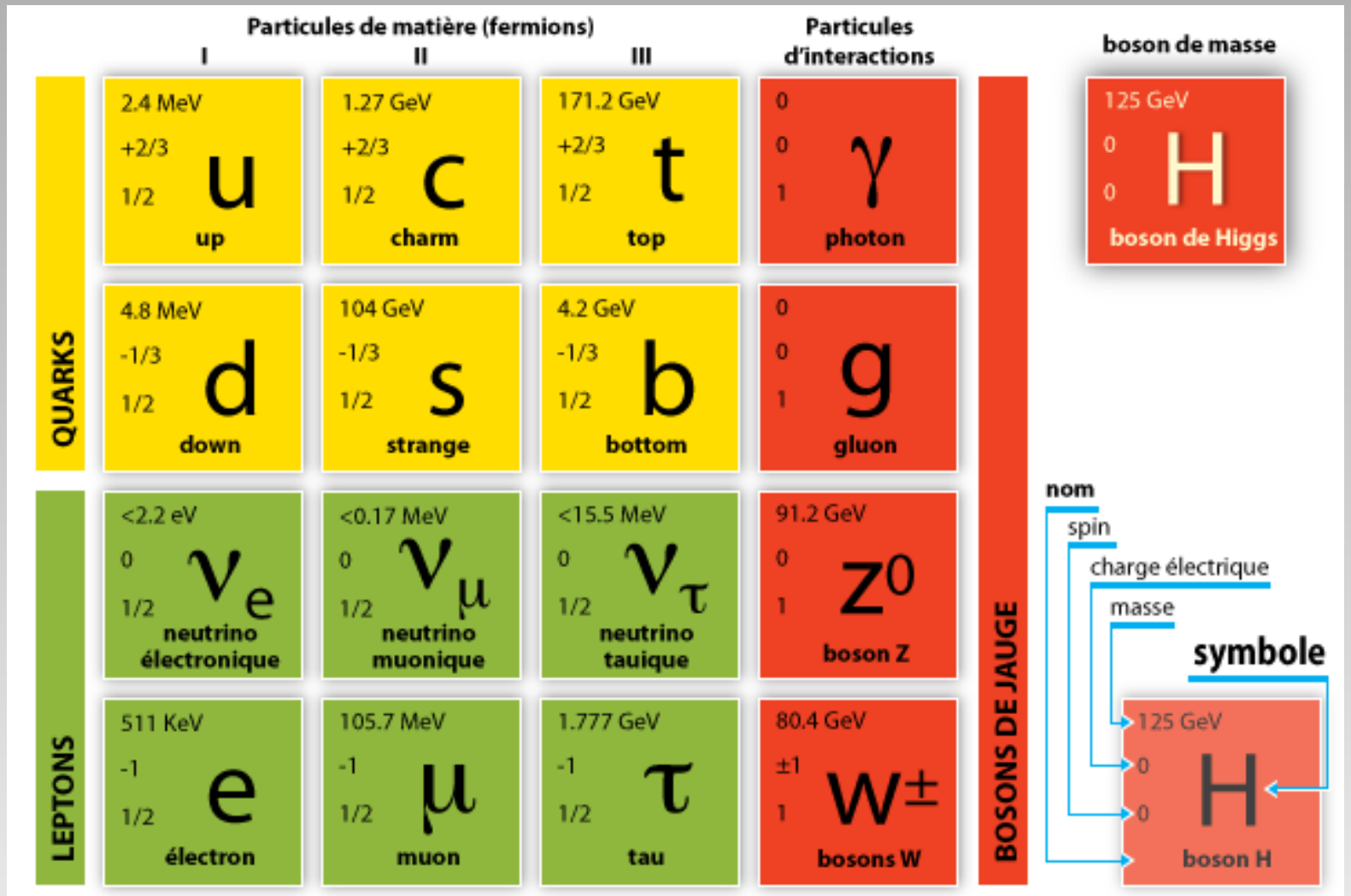
Symétries de rotation

Un **fermion** est une particule de spin s demi-entier (invariante sous les rotations d'angle $\frac{360^\circ}{s_z}$).

Tous les fermions élémentaires observés expérimentalement possèdent un spin $s = \frac{1}{2}$.

Exemples: constituants élémentaires de la matière ordinaire (électrons, quarks, etc)

Modèle standard



Symétries de rotation

Un fermion de spin $s = \frac{1}{2}$ est décrit par un champ de spineurs.

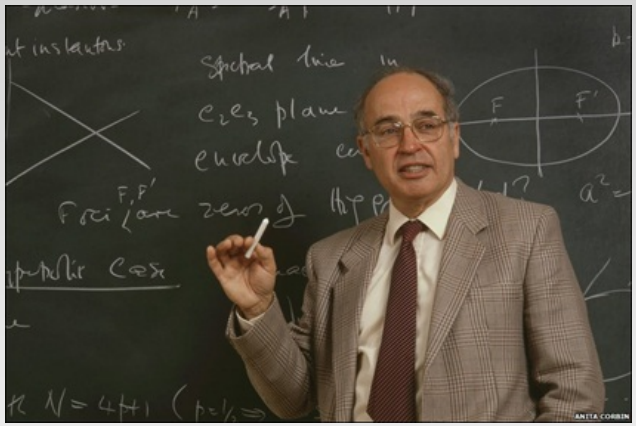
Un **spineur** est une grandeur exotique qui change de signe pour une rotation d'un tour (360°). Il faut donc effectuer deux tours (720°) pour qu'un spineur retourne à sa configuration d'origine!

Métaphore: ceinture de Dirac

Qu'est-ce qu'un spineur?

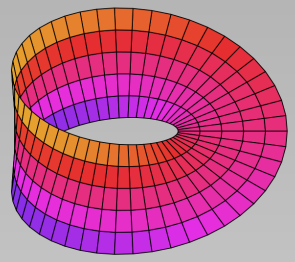
Personne ne comprend complètement les spineurs. Leur algèbre est comprise formellement mais leur signification géométrique est mystérieuse.
Dans un certain sens ils décrivent la "racine carrée" de la géométrie et, de même que comprendre le concept de la racine carrée de -1 a pris des siècles, la même chose pourrait être vraie des spineurs.

Michael Atiyah, 2007
(médaille Fields en 1966)

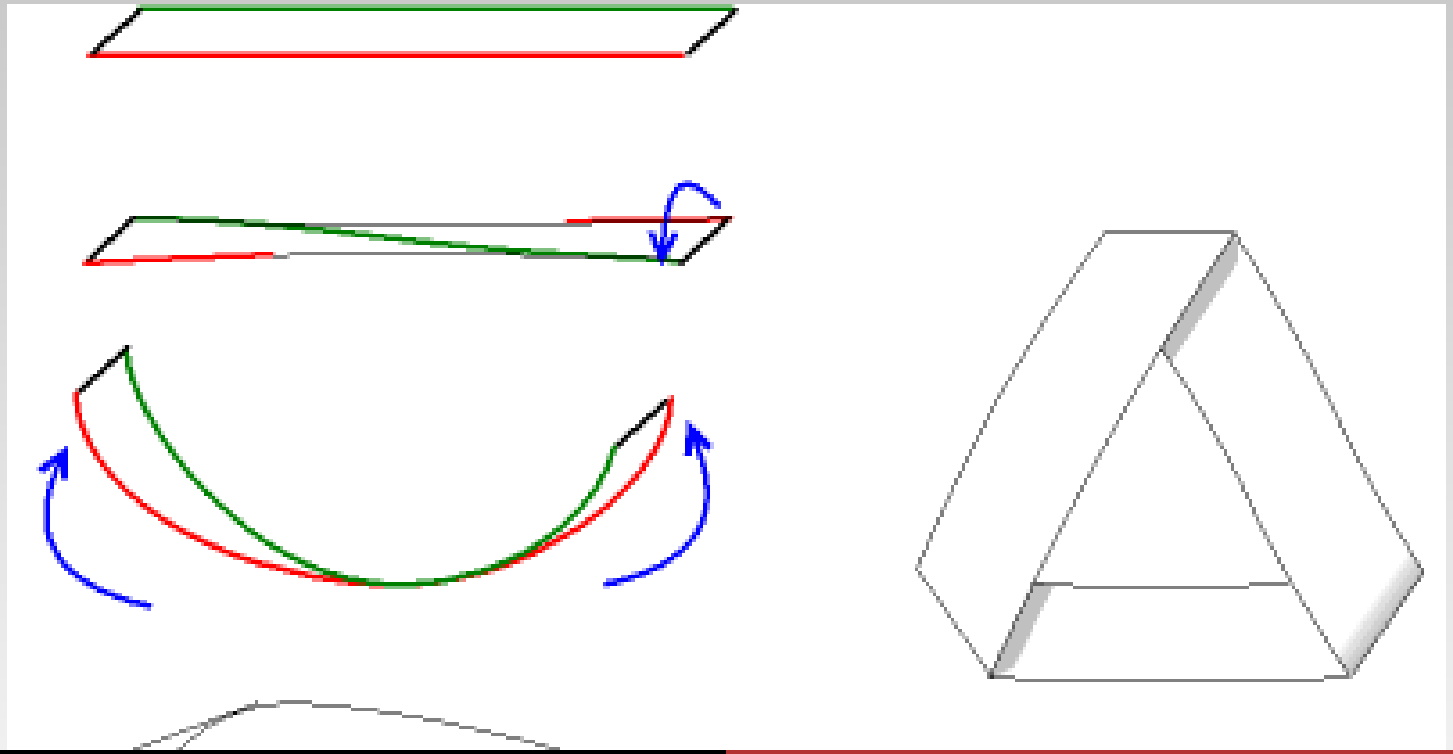


Spineur

Une façon d'appréhender la notion de spineur est le **ruban de Möbius**

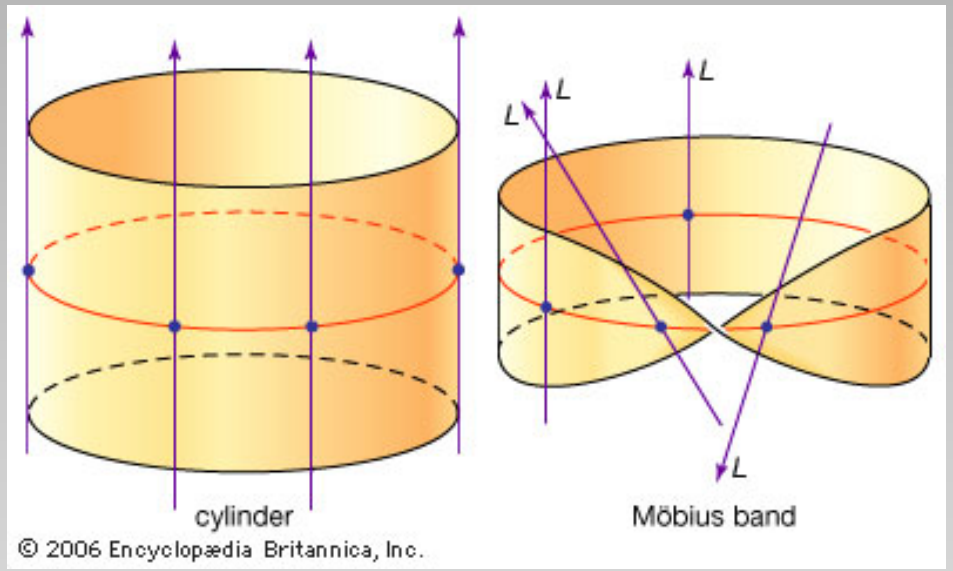


construit comme suit:



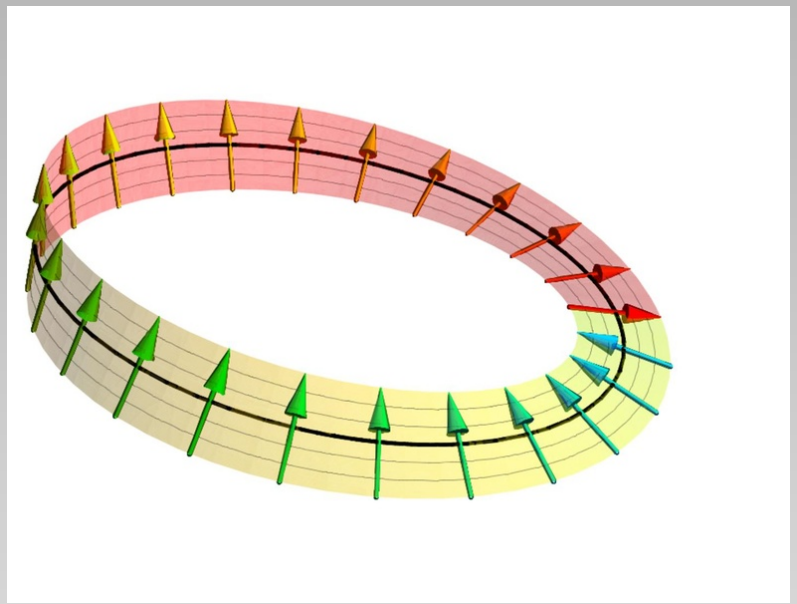
Spineur

Le milieu d'un ruban de Möbius forme un cercle correspondant à une rotation d'un tour complet.



Spineur

La rotation d'un spineur correspond ainsi au glissement d'un vecteur vertical sur un ruban de Möbius.



Qu'est-ce qu'un spineur?

Il est vraiment étrange que absolument personne ne remarqua, jusqu'au travaux de Pauli et Dirac – qui sont advenus vingt ans après la relativité restreinte, qu'une étrange tribu de nom de famille spineur habite l'espace (...)

Paul Ehrenfest, 1932
(1880-1933, inventeur du mot "spineur")

Bosons et fermions

Comportement collectif

- Les boson sont “grégaires” (statistique de Bose-Einstein) et tendent à occuper le même état quantique (condensat de Bose-Einstein).
- Les fermions sont “individualistes” (statistique de Fermi-Dirac) et deux d'entre eux ne peuvent jamais occuper exactement le même état quantique (principe d'exclusion de Pauli).

Symétries de rotation

Conclusion: En physique moderne, les particules élémentaires sont décrites par des champs de grandeurs caractérisées par leur propriété de symétrie sous les rotation d'un s-ème de tour.

Résumé:

Particule	Champ	Grandeur	Spin	Rotation
Higgs	Scalaire	Scalaire	0	quelconque
Électron	Spinoriel	Spineur	1/2	2 tours
Photon	Électromagnétique	Vecteur	1	1 tour
Gravitino (??)	Gravitationnel	Spin-vecteur	3/2	2/3 tour
Graviton (?)	Gravitationnel	Tenseur	2	1/2 tour
???	???	Spin-tenseur	s>2	$1/s_z$ tour