

## TD4

**Exercice 1.** Développer en série de Fourier les fonctions  $T$ -périodiques suivantes:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < x < T/2, \\ -1 & \text{pour } T/2 < x < T, \end{cases} \\f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } -\tau/2 < x < \tau/2, \\ 0 & \text{pour } \tau/2 < x < T - \tau/2, \end{cases} \\f(x) &= |x| \text{ pour } -T/2 < x < T/2, \\f(x) &= x \text{ pour } 0 < x < T, \\f(x) &= x^2 \text{ pour } -T/2 < x < T/2.\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Démontrer l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Indication: utiliser l'égalité de Parseval pour la fonction  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2$ , développée en série de cosinus.

**Exercice 3.** Considérons la fonction  $f(x)$  de période 2 définie par

$$f(x) = x \quad \text{pour } -1 < x \leq 1.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier.

2. En utilisant l'identité de Parseval pour cette série, calculer la somme  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

## Correction

1. Considérons par exemple la première fonction,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < t < T/2, \\ -1 & \text{pour } T/2 < t < T, \end{cases}$$

et calculons ses coefficients de Fourier:

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt,$$

où  $\omega = 2\pi/T$ . Nous avons

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-in\omega t} dt + \int_{T/2}^T (-1) \cdot e^{-in\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \Big|_0^{T/2} - \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \Big|_{T/2}^T \right) = \frac{-e^{in\omega T/2} + 1 - e^{in\omega T/2} + e^{in\omega T}}{in\omega T}. \end{aligned}$$

Comme  $\omega T = 2\pi$  et  $e^{i\pi n} = (-1)^n$ , on obtient

$$c_n(f) = \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{i\pi n} & \text{pour } n = 2k + 1, \\ 0 & \text{pour } n = 2k. \end{cases}$$

Donc la série de Fourier de  $f$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} e^{in\omega t} = \left( \begin{array}{l} \text{c'est déjà une réponse acceptable,} \\ \text{mais on va la simplifier encore un peu} \end{array} \right) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{i\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)\omega t} = (\text{vérifiez!}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2k+1)} (e^{i(2k+1)\omega t} - e^{-i(2k+1)\omega t}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\omega t. \end{aligned}$$

2. Nous considérons ici une fonction  $f(t)$  de période  $T = 4$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq 2, \\ -t & \text{pour } -2 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Calculons ses coefficients de Fourier:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= (\text{comme } T = 4 \text{ et alors } \omega = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-in\pi t/2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_0^2 t e^{-in\pi t/2} dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot e^{-in\pi t/2} dt \right) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] & \text{pour } n \neq 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier,

$$c_n(f) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} & \text{pour } n = 2k + 1, \\ 0 & \text{pour } n = 2k, k \neq 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

L'égalité de Parseval s'écrit sous la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt. \quad (1)$$

Dans notre cas, la partie gauche de (1) est donnée par

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} = 1 + \frac{32}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Dans la partie droite de (1), on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

Comparaison des deux permet d'écrire

$$\frac{32}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{3} \implies S_{\text{impaires}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

La somme  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  peut être exprimée en fonction de  $S_{\text{impaires}}$ : en transformant

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4} + S_{\text{impaires}} = \frac{S}{16} + S_{\text{impaires}},$$

on trouve

$$\frac{15}{16}S = S_{\text{impaires}} \implies S = \frac{16}{15}S_{\text{impaires}} = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$