

1 Projétons nous à l'infini

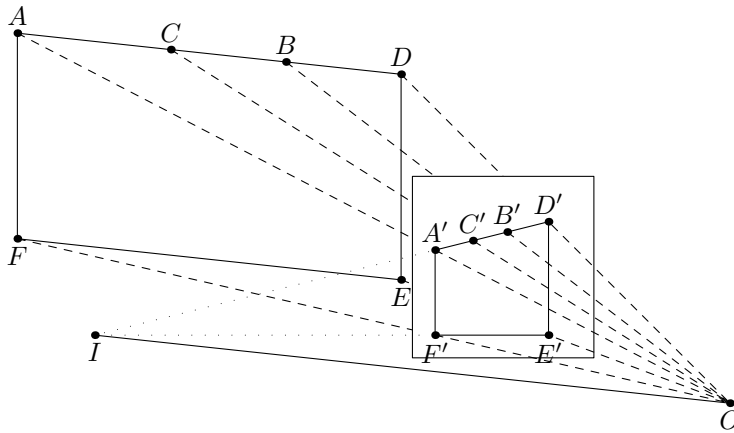
Nous cherchons à montrer comment on en est progressivement venu à introduire des éléments à l'infini. Nous laisserons volontairement de côté l'étude des transformations correspondantes (*i.e.* les homographies) ainsi que celles des faisceaux de coniques. On renvoie le lecteur à [2], [1].

1.1 La perspective des peintres

Représenter une figure de l'espace sur la feuille de papier revient à définir une application de l'espace tout entier sur un plan, qui doit respecter certaines contraintes soit pratiques, soit esthétiques, liées à la perception de l'œil humain - par exemple la conservation de l'alignement -. Une première possibilité est la perspective *axonométrique* qui correspond à une projection orthogonale ; elle est surtout utilisée en dessin industriel où les vues de face et de côtés sont des projections *axonométriques* sur les plans de coordonnées. Cette projection conserve l'alignement et transforme des droites parallèles en droites parallèles ; par contre on perd toute idée de profondeur : l'image d'une droite orthogonale au plan de projection est réduite à un point. Pour pallier cet inconvénient, MONGE a inventé la *géométrie descriptive* qui a longtemps figurée aux programmes des classes de première et terminale E et des classes préparatoires. Il s'agit d'une méthode extrêmement puissante, qui demande néanmoins une certaine habitude . . . : un point, une droite, un cercle sont représentés par leurs projections sur deux plans orthogonaux, qui sont ensuite rabattus sur un même plan ; un plan est déterminé par deux droites sécantes.

Une deuxième méthode a lentement émergé, à partir XIV^{ème} siècle, grâce aux peintres italiens qui cherchaient à rendre plus réalistes leurs tableaux ; certains avaient même inventés d'ingénieux systèmes optiques pour « vérifier » leurs constructions. Celles-ci ont été étudiées et justifiées par de nombreux mathématiciens, de PACIOLI à PONCELET en passant par DESARGUES et on conduit à la *géométrie projective*.

On choisit un point O qui représente l'œil (à la fois celui du peintre et celui du spectateur qui regarde le tableau), un plan \mathcal{P} qui représente la toile ; à chaque point M de l'espace on associe, lorsque cela est possible, l'intersection de \mathcal{P} avec la droite (OM) . Sur la figure, le plan du tableau $(A'D'E')$ est le plan de la feuille, le point O est devant et le plan (ADE) est vertical non parallèle à \mathcal{P} .

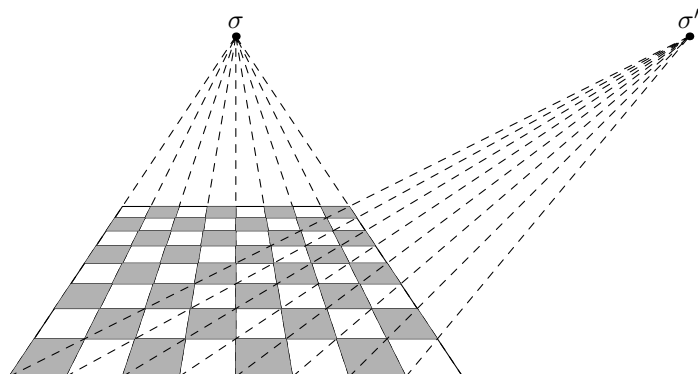


La transformation géométrique correspondante, appelée *projection conique*,

- conserve l'alignement : en effet l'image d'une droite \mathcal{D} ne contenant pas O est toute entière contenue dans l'intersection du plan \mathcal{P} et du plan \mathcal{Q} défini par O et \mathcal{D} .
- n'est pas affine car elle ne conserve pas le parallélisme : soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites parallèles : on suppose que la parallèle à \mathcal{D} et \mathcal{D}' rencontre \mathcal{P} au point I . L'intersection du plan \mathcal{Q} défini par O et \mathcal{D} (resp. du plan \mathcal{Q}' défini par O et \mathcal{D}') et du plan \mathcal{P} est une droite contenant I puisque I appartient au plan \mathcal{Q} (resp. \mathcal{Q}'). En outre le point I n'est l'image d'aucun point de \mathcal{D} , ni de \mathcal{D}' .
- conserve le birapport. La projection conique n'étant pas affine ne saurait conserver les milieux ou les barycentres, par contre elle conserve le birapport ; il suffit de considérer le faisceau de droites (OA) , (OB) , (OC) , (OD) . (voir [1] exercice 18 p. 84)

Les droites (AF) et (DE) qui sont parallèles au plan \mathcal{P} ont pour image les parallèles $(A'F')$ et $(D'E')$ et le point I est commun aux images de toutes les droites parallèles à (AD) .

Ces quelques remarques suffisent à répondre à une question posée par les peintres : comment représenter un dallage ? Les côtés du carrelage parallèles au bord horizontal du tableau restent parallèles à celui-ci (et entre eux) les autres côtés convergent vers un point (noté σ ci-dessus) appelé *point de fuite*. La question délicate est de trouver le « bon espacement » entre les parallèles, puisqu'il n'y a pas conservation des milieux. La solution du mathématicien est de considérer les diagonales des carreaux, qui étant parallèles entre elles, doivent aussi se rencontrer vers un autre point de fuite σ' : la position de ce dernier point dépend de la position de l'observateur par rapport au tableau.



C'est à DESARGUES que revient le mérite d'avoir considéré une conique comme une perspective de cercle : la section d'un cône par un plan n'est rien d'autre que la perspective conique d'un des cercles de base du cône en prenant pour point O le sommet du cône ! Toute propriété d'alignement et de concours ne faisant intervenir que des birapports vérifiée par le cercle, le sera aussi pour une conique. Par exemple, de la même façon qu'on définit la polaire d'un point par rapport à un cercle, on peut définir la polaire d'un point par rapport à une conique. De même pour le théorème de Pascal.

1.2 Le plan projectif

Revenons sur la figure : le point I n'est l'image d'aucun point de \mathcal{D} , néanmoins on peut penser qu'il est l'image d'un point de \mathcal{D} infiniment éloigné de O . D'où l'idée, qui semble être apparue clairement chez DESARGUES, qu'on pouvait rajouter un point « à l'infini » sur une droite \mathcal{D} et que ce point était le même pour toutes les parallèles à \mathcal{D} . Si on considère une famille de droites quelconques d'un plan Π , les points à l'infini de ces droites appartiennent tous à une droite appelée *droite de l'infini* (en perspective il s'agit de la ligne d'horizon). C'est ainsi que naquit la notion de plan projectif : on complète chaque droite par un¹ point à l'infini et le plan affine par une droite de l'infini qui contient tous ces points.

Si l'on veut rendre rigoureux ce qui précède on peut procéder de deux manières différentes : soit géométrique, soit axiomatique. Considérons le plan (ADE) de la figure : les points du plan affine s'identifient avec les droites issues de O et sécantes avec (ADE) , les éléments à l'infini correspondent aux parallèles issues de O . D'où la définition : un plan projectif n'est rien d'autre que l'ensemble des droites d'un espace affine de dimension 3 contenant un point donné O . Autrement dit les « points » de cet espace projectif sont

¹On ne confondra pas une droite réelle projective avec la « droite achevée » $\bar{\mathbb{R}}$ des analystes égale à $\mathbb{R} \cap \{-\infty, +\infty\}$.

des droites affines! De même une droite appartenant au plan ADE est un ensemble de points affines, qui correspondent donc à des droites coplanaires issues de O : une droite projective² sera donc définie par un plan affine contenant O , la droite de l'infini étant définie comme le plan parallèle à (ADE) contenant O .

On peut mettre un peu d'ordre dans cette confusion en travaillant avec des *coordonnées homogènes*. En supposant que O est l'origine de \mathcal{E}_3 , le plan projectif s'identifie avec l'ensemble des triplets $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ quotienté par la relation d'équivalence $(x, y, z) \mathcal{R} (x', y', z') \iff \exists k \neq 0, (x', y', z') = k(x, y, z)$. Autrement dit, deux triplets (x, y, z) et (x', y', z') représentent le même point de l'espace projectif s'il existe $k \neq 0$ tel que $(x', y', z') = k(x, y, z)$, c'est-à-dire si les points de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') sont alignés avec O . Remarquons que si $z \neq 0$, tout triplet (x, y, z) est équivalent à un triplet $(x', y', 1)$: par convention ces points sont dits à *distance finie*, les points $(x, y, 0)$ étant à l'infini. Le point $(x, y, 1)$ est identifié avec le point de coordonnées (x, y) dans un plan affine rapporté à un repère fixé.

Le lecteur a déjà rencontré quelque chose d'analogue aux coordonnées homogènes, à savoir les coordonnées barycentriques : un point du plan affine est représenté par des triplets de coordonnées (α, β, γ) qui sont tous équivalents pour la relation \mathcal{R} . et on peut toujours choisir un représentant tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Envisageons maintenant un point de vue axiomatique : que deviennent les axiomes d'incidence dans cette nouvelle structure? Ils se résument aux deux énoncés

- (i) Par deux points passe une seule droite.
- (ii) Deux droites ont exactement un point commun.

En rajoutant l'axiome suivant, axiome de DESARGUES on peut définir une structure de plan projectif :

(iii) Quelles que soient les droites concourantes distinctes \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' et les points a, b de \mathcal{D} , a', b' de \mathcal{D}' et a'', b'' de \mathcal{D}'' (tous distincts et distinct du point commun à \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}''), les points d'intersection $(aa') \cap (bb')$, $(aa'') \cap (bb'')$ et $(a'a'') \cap (b'b'')$ sont alignés.

La parfaite symétrie des énoncés (i) et (ii) : deux points déterminent une droite et deux droites déterminent un point est à l'origine d'un principe, fort utile, le *principe de dualité*. Pour tout théorème faisant intervenir des droites et des points, on obtient un énoncé équivalent en échangeant « droites » et « points », « points alignés » et « droites concourantes » : le théorème de

²Une droite projective peut ainsi être considérée comme l'ensemble des droites d'un plan affine issues de O

PAPPUS et le « dual » du théorème de DESARGUES.

Il faut avoir à l'esprit qu'un plan projectif contient le plan affine et donc que la géométrie affine doit être conséquence de la géométrie projective. le milieu d'un bipoint (A, B) est le conjugué hamonique du point à l'infini de (AB) par rapport à A et B .

Une droite de l'espace projectif correspond en coordonnées homogènes (x, y, z) à une équation $ux + vy + wz = 0$ avec $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$; si $(u, v) = (0, 0)$ l'équation se résume à $z = 0$ qui est la droite de l'infini, sinon les points correspondants du plan affine *i.e.* ($z = 1$) vérifient $ux + vy + w = 0$ qui est l'équation d'une droite affine. Une conique projective sera définie par un polynôme (homogène) de degré 2 par rapport aux coordonnées ho-

mogènes, c'est-à-dire une forme quadratique. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ une matrice symétrique non nulle, l'ensemble des points de coordonnées homogènes (x, y, z) tels que $(x, y, z)M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ est une conique projective d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

les points à distance finie sont donnés par $z = 1$ c'est-à-dire $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ et les points à l'infini par $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.

En particulier si la forme quadratique définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est de rang 1, la conique est tangente à la droite de l'infini et c'est une parabole. L'hyperbole affine d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ correspond à la conique projective $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2z = 0$, les asymptotes d'équation $bx \pm ay = 0$ correspondent aux droites projectives $bx \pm ay = 0$. Les points communs avec l'hyperbole correspondent à $z^2 = 0$: les droites projectives sont tangentes à l'hyperbole et les points de tangence sont à l'infini.

De même on dira que deux points A et B de coordonnées homogènes

(x, y, z) et (x', y', z') sont conjugués par rapport à la conique projective $(x, y, z)M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

0 si et seulement si $(x', y', z')M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. On peut vérifier, dans le cas d'un

cercle, que cette définition correspond à la définition géométrique puisque le cercle $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ correspond à la conique projective $x^2 + y^2 - 2axz - 2byz + cz^2 = 0$. La relation de conjugaison, pour les points

à distance finie, est alors

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

soit $xx' + yy' - a(x+x') - b(y+y') + c = 0$ ce qui est bien la relation annoncée. On peut facilement en déduire

- que l'ensemble des conjugués d'un point A est une droite appelée *polaire* de A par rapport à la conique³.
- si deux points A et B sont conjugués par rapport à la conique et si la droite (AB) rencontre celle-ci en C et D alors (A, B, C, D) est harmonique.
- La directrice d'une conique est la polaire du foyer F associé.
- Le centre d'une conique est le pôle de la droite de l'infini.
- La polaire d'un point A appartenant à la conique est la tangente en ce point.

Remarquons que la correspondance entre *point* et *polaire* (par rapport à une conique) est un exemple de dualité. En fait le principe de dualité s'étend aux coniques en remplaçant « point d'une conique » par « droite tangente à la conique » : exemple

1.3 Jouons avec l'infini

Le fait de rajouter des éléments à l'infini permet d'avoir des énoncés plus généraux en géométrie affine :

- plus besoin de distinguer concourrantes ou parallèles
- une translation est une homothétie dont le centre est à l'infini
- Une transformation affine est une transformation projective qui conserve la droite de l'infini ! en effet elle conserve le parallélisme, donc le point à l'infini d'une droite \mathcal{D} est transformé en un point à l'infini.

Le lecteur curieux se posera sans doute la question : rajouter des éléments à l'infini au plan affine est une chose, mais qu'en est-il des questions d'angles et de distances ? comment définir l'orthogonalité ? les rotations ? La solution, une fois encore, passe par les nombres complexes : on définit une structure de plan projectif sur \mathbb{C}^2 et l'on fait apparaître deux points « magiques » sur la droite de l'infini, les *points cycliques*, de coordonnées homogènes $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$.

³La polaire d'un point par rapport à deux droites est alors la polaire relativement à la conique dégénérée constituée par ces deux droites.

- Les cercles sont des coniques passant par les points cycliques, et comme toutes les coniques deux cercles ont maintenant quatre points en commun.
- Une transformation conservant les points cycliques (et donc la droite de l'infini) est une rotation.
- Formule de LAGUERRE : Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites sécantes en O , I et J les droites isotropes issues de O (*i.e.* les deux droites définies par O et un des points cycliques), on a

$$\text{birapport}(I, J, \mathcal{D}, \mathcal{D}') = e^{2i\theta}$$

où θ est l'angle des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . En particulier deux droites sont orthogonales si et seulement si elles forment un faisceau harmonique avec les droites isotropes.

Références

- [1] GRAMAIN A. *Géométrie Elémentaire*, Hermann 1992.
- [2] SAMUEL P. *Géométrie projective*, P.U.F 1986.