La Mathématique du Modèle

On explique comment créer une instabilité diffusionnelle

Le modèle de Murray

Soient $u(t)$ et $v(t)$ les concentrations des deux morphogènes. On suppose qu'elles sont liées par les relations

$$\begin{cases} u_t &= \gamma f(u,v) + \Delta u \\ v_t &= \gamma g(u,v) + d\Delta v \end{cases} \tag{1}$$

$$f(u,v) = a - u - h(u,v), \qquad g(u,v) = \alpha(b-v) - h(u,v) \tag{2}$$

$$h(u,v) = \frac{\rho uv}{1+u+Ku^2} \tag{3}$$

où u_t et v_t désignent les dérivées par rapport au temps de u et v et Δ l'opérateur de Laplace, qui correspond à la diffusion.
Les paramètres α, ρ et K fixent la réaction, le paramètre d est le paramètre de diffusion : il doit être supérieur à 1 pour qu'apparaissent les instabilités. Les paramètres a et b déterminent les solutions constantes du système. Le paramètre γ est le facteur d'echelle : il est en rapport avec la taille (ou la forme) du domaine.
Les valeurs suivantes sont utilisées dans le programme informatique

$$\alpha = 0{,}15 \quad K = 0{,}1 \quad \rho = 18{,}5 \quad d = 10 \quad a = 92 \quad b = 64.$$

On peut faire varier γ entre 1 et 50.
La solution stationnaire est donnée par $u_s \approx 9{,}934$ et $v_s = 9{,}289$. A l'instant $t = 0$ on crée une petite perturbation aléatoire de u et v autour des valeurs u_s et v_s et on laisse évoluer le système en fonction du temps : à intervalle régulier on affiche en noir à l'écran les régions où u est supérieur à u_s : au bout d'un certain temps[1] il apparait un motif qui n'évolue plus.

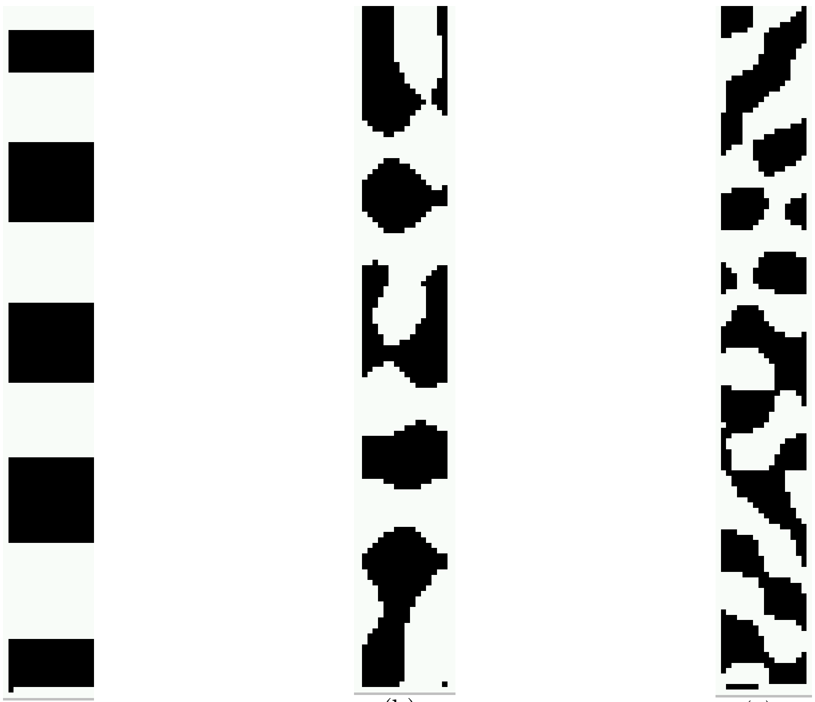
L'instabilité

James D. Murray affirme que le comportement du système est déterminé par le système linéarisé

$$\begin{cases} u_t &= \gamma(a_1 u + b_1 v) + \Delta u \\ v_t &= \gamma(c_1 u + d_1 v) + d\Delta v; \end{cases} \tag{4}$$

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial u}(u_s,v_s), \quad b_1 = \frac{\partial f}{\partial v}(u_s,v_s), \quad c_1 = \frac{\partial g}{\partial u}(u_s,v_s), \quad d_1 = \frac{\partial g}{\partial v}(u_s,v_s)$$

[1] J. D. Murray ne précise pas quelles sont les échelles de temps et d'espace.



(a) (b) (c)

FIG. 1 – Cas d'un domaine cylindrique de longueur 16, ce qui correspond à un pas de 0,125 pour (a) $\gamma = 4$, (b) $\gamma = 9$, (c) $\gamma = 16$.

En utilisant l'analyse de Fourier, dans un domaine rectangulaire défini par $0 < x < p$ et $0 < y < q$, les solutions sont données par

$$\sum_{n,m} C_{m,n} \exp(\lambda(k^2)t) \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} \tag{5}$$

$$\text{avec} \quad k^2 = \pi^2 (\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}). \tag{6}$$

où les $C_{n,m}$ sont définis par les conditions initiales et $\lambda(k^2)$ est solution d'une équation du second degré

$$\lambda^2 + \lambda\Big(k^2(1+d) - \gamma(a_1 + d_1)\Big) + dk^4 - \gamma(da_1 + d_1)k^2 + \gamma^2(a_1 d_1 - b_1 c_1) = 0.$$

Seuls les modes, pour lesquels $\lambda(k^2) > 0$ finissent par subsister, les autres disparaissant rapidement. Lorsqu'on revient au problème complet, on admet que la croissance exponentielle des modes principaux est freinée puis stoppée par la non-linéarité du système représentée ici par la fonction h.

Il y a apparition de motifs lorsqu'il existe des couples (m, n) pour lesquels $\lambda(k^2)$ est positif. S'il n'existe aucun m (resp. n) non nul parmi ces couples le motif est formé de bandes (c.f. Figure 1 (a)), sinon il correspond à des tâches (c.f. Figure 1 (c)) : ceci dépend à la fois des dimensions du domaine et du paramètre γ. Sur la Figure 1 (b) on voit la transition entre les deux cas.

Nous vous proposons de tester vous-même votre habilité à tâcher la queue ou le corps d'un animal.

Vous pouvez choisir un « corps » cylindrique dont le pourtour est égal à la longueur (96 fois la valeur xpas) ou une « queue » cylindrique dont la longueur est 6 fois le pourtour. En outre le programme vous affichera les valeurs de m et n correspondant à des $\lambda(k^2)$ positifs pour vous permettre de deviner le motif avant de le faire afficher.

Références

[1] JAMES D. MURRAY Les taches du léopard. *Pour la Science* Mai 1988.

[2] JAMES D. MURRAY Mathematical Biology. *Springer* 1993.