

INTRODUCTION

Les travaux que nous présentons se composent de trois parties reliées par un thème commun, l'étude lorsque t tend vers l'infini, du comportement des solutions d'un problème d'évolution elliptique, conservatif, sur une variété riemannienne compacte.

La première partie, à paraître dans le *Journal d'Analyse Mathématique* a pour objet l'étude du comportement asymptotique des solutions d'une équation elliptique non linéaire conservative, perturbation linéaire d'une équation monotone. Les solutions positives sont caractérisées et les solutions de signe quelconque sont associées à un attracteur maximal compact.

La deuxième partie généralise les méthodes et les résultats précédents au cas d'un système d'équations aux dérivées partielles elliptique de type conservatif.

Dans la troisième partie on étudie les solutions positives d'une équation associée à un opérateur non monotone, perturbation non linéaire d'un opérateur monotone.

L'origine de notre travail est la suivante : dans l'étude des singularités en 0 de l'équation d'Emden-Fowler avec potentiel

$$\Delta u \pm \frac{cu}{|x|^2} - u^q = 0 \quad (q > 1) \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^N$, on effectue le passage aux coordonnées sphériques $t = \ln(r)$, $u(r, \alpha) = r^{\frac{2}{q-1}}v(t, \alpha)$ et $\alpha \in S^{N-1}$, ce qui conduit à l'équation suivante

$$\Delta_S v + v_{tt} + (N - 2\frac{q+1}{q-1})v_t + (\frac{4}{(q-1)^2} \pm c)v - v^q = 0 \quad (2)$$

dans $\mathbb{R} \times S^{N-1}$ avec Δ_S opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{N-1} . Les singularités de u au voisinage de $r = 0$ ou pour r infini amènent à étudier le comportement de v lorsque t tend vers l'infini. Si l'exposant q est différent de la valeur critique $(N+2)/(N-2)$, le coefficient de v_t est non nul et joue le rôle d'un terme d'amortissement. La non-nullité de ce terme permet d'établir que

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} v_t^2 dt d\sigma < +\infty \quad (3)$$

d'où il découle facilement que v_t et v_{tt} tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Le comportement asymptotique de l'équation est bien connu [11], [12], [8] : v converge dans $C^3(S^{N-1})$, lorsque t tend vers l'infini, vers une partie compacte, connexe, de l'ensemble des fonctions ω satisfaisant

$$-\Delta_S \omega + \omega|\omega|^{q-1} = (\frac{4}{(q-1)^2} \pm c)\omega. \quad (4)$$

Dans de nombreux cas, la limite se réduit à un singleton.

Pour la valeur particulière $q = \frac{N+2}{N-2}$, le coefficient du terme d'amortissement v_t dans (2) est nul, ce qui correspond à :

$$\Delta_S v + v_{tt} + \lambda v - v^{\frac{N+2}{N-2}} = 0 \quad (5)$$

en posant $\lambda = (\frac{(N-2)^2}{4} \pm c)$. Nous avons donc cherché de nouvelles méthodes qui tiennent compte du caractère conservatif de l'équation vérifiée par v .

Dans un contexte différent, l'étude des transformations conformes de $\mathbb{R}^N$ conduit à l'équation

$$-\Delta u = \pm u^{\frac{N+2}{N-2}}$$

En effectuant le même changement de variables que précédemment, on en déduit l'équation conservative

$$v_{tt} + \Delta_S v - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 v \pm v^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$$

En utilisant une technique de symétrie en mesure, les asymptotiques des solutions sont caractérisées dans [5].

1 Première Partie

Il nous a paru intéressant de considérer l'équation (5) dans un cadre plus général.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte pour la métrique g , avec ou sans bord, Δ_M le laplacien ainsi défini sur M . Considérons l'équation

$$u_{tt} + \Delta_M u = f(u) \tag{6}$$

où f est une fonction de la forme $f(u) = h(u) - \lambda u$, ayant des propriétés de croissance et de convexité analogues au "modèle" où h est une fonction puissance $r \mapsto r|r|^{p-1}$.

On notera λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_M$, éventuellement nulle, avec les conditions au bord correspondantes et Ω le domaine $M \times \mathbb{R}^+$. On ne considèrera comme solutions du problème que des fonctions appartenant à $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, et comme sous-solutions (resp. sur-solutions) des fonctions dans $C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Notre résultat essentiel est le suivant :

Théorème 1 *Supposons $\lambda > \lambda_1$; toute solution positive du problème (6) sur Ω avec conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann, converge dans $C^2(M)$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers l'unique fonction strictement positive Φ qui vérifie :*

$$\Delta_M \Phi + f(\Phi) = 0 \tag{7}$$

avec les conditions au bord correspondantes.

Remarquons que lorsque $\partial M = \emptyset$ ou lorsque les conditions au bord sont les conditions de Neumann, la fonction Φ est simplement la constante μ_f telle que $f(\mu_f) = 0$.

On montre ensuite que le problème est "bien posé" pour les solutions positives : pour toute donnée initiale $u_0 \in C(M)$ positive compatible avec les conditions au bord il existe une *unique* solution *positive* sur Ω qui vérifie $u(x, 0) = u_0(x)$.

On peut déjà remarquer que la nullité du coefficient d'amortissement dans (2) entraîne la conservation de l'énergie : pour toute solution u la quantité

$$E(u) = - \int_M u_t^2 + \int_M |\nabla u|^2 + 2 \int_M F(u) \quad (8)$$

(où F désigne la primitive de f nulle en 0) est indépendante de t . On notera alors $J(u)$ l'énergie normalisée $J(u) = \frac{1}{\text{vol}(M)} E(u)$.

Une question souvent associée au comportement asymptotique des solutions (voir par exemple [9]) est celle de la connexion des états stationnaires, ou de l'existence de solutions globales de (6).

Etant données deux solutions du problème stationnaire (7) Ψ_1 et Ψ_2 , on dit qu'une solution v de (6) définie pour tout t est une connexion, ou orbite connectante, entre Ψ_1 et Ψ_2 si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(., t) = \Psi_2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(., t) = \Psi_1.$$

Si une solution $v(x, t)$ connecte Ψ_1 et Ψ_2 alors $v_t \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow +\infty$ et la relation (8) montre que Ψ_1 et Ψ_2 ont la même "énergie"

$$\text{vol}(M)J(\Psi) = \int_M (|\nabla \Psi_1|^2 + 2F(\Psi_1)) = \int_M (|\nabla \Psi_2|^2 + 2F(\Psi_2)).$$

La solution stationnaire positive Φ est définie comme réalisant le minimum de l'énergie $J(\Phi)$; Φ ne peut donc être connectée qu'avec elle-même ou avec $-\Phi$. Dans le premier cas la fonction $v(x, t) = \Phi(x)$ réalise la connexion ; pour le deuxième nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2 *Il existe une solution de (6) qui réalise une connexion entre Φ et $-\Phi$.*

Remarquons que le Théorème de Matano [9, Theorem 8] ne s'applique pas ici, car la solution nulle est "entre" les deux états stationnaires Φ et $-\Phi$.

Lorsque (M, g) possède des symétries, comme par exemple S^n ou $[0, 1]$, il est possible de connecter des états stationnaires changeant de signe si l'on peut se ramener à des fonctions de signe constant. Si G est un sous-groupe fini du groupe orthogonal $O(N)$, G est engendré par un nombre fini de réflexions par rapport à des hyperplans (H_k) , qui divisent R^N en un nombre fini de polyèdres. Ces polyèdres sont tous égaux et G agit de façon transitive sur eux. Dans le cas de S^{N-1} , ces polyèdres définissent un pavage à l'aide de simplexes sur lesquels G agit transitivement. Soit S un de ces simplexes. Si λ est assez grand, on peut trouver une solution positive Φ_S du problème stationnaire sur S , nulle sur ∂S . On prolonge ensuite Φ_S en une fonction Ψ définie sur S^{N-1} à l'aide de la formule

$$\Psi|_{S_i} = \det(g_i)\Phi_S \circ g_i^{-1}$$

si $S_i = g_i(S)$ pour un certain $g_i \in G$. En connectant Φ_S à $-\Phi_S$, on obtient selon le même procédé une connexion entre Ψ et $-\Psi$.

Les outils que nous utilisons sont

- un principe de comparaison des solutions positives
- une majoration a priori des solutions globales
- l'existence de solutions positives u_T du problème de Dirichlet correspondant à (6) sur $M \times [0, T]$ pour T assez grand.
- l'existence de sur-solutions du problème stationnaire sur M .

On construit d'abord une solution positive minimale du problème, qui fournit d'ailleurs la connexion du Théorème 2, en passant à la limite dans u_T lorsque $T \rightarrow +\infty$.

On construit ensuite une solution positive maximale en utilisant la sur-solution et on conclut en passant à la limite par encadrement.

La simplicité du comportement des solutions *positives* de (6) nous amène à envisager celui des solutions de signe quelconque. Le problème est beaucoup plus délicat à traiter : les arguments liés à l'unicité des solutions ou à la monotonie de l'opérateur ne peuvent plus s'appliquer : en utilisant les solutions du problème de Dirichlet nulles en $t = 0$ et $t = T$ (définies pour T assez grand), que l'on peut prolonger par réflexion à $\mathbb{R} \times M$ tout entier, on obtient des solutions de signe variable qui ne s'homogénéisent pas.

Dans le cas d'une variété sans bord, lorsque $\lambda \leq \lambda_2$ (première valeur propre non nulle) on dispose d'un résultat d'homogénéisation asymptotique, en supposant simplement h croissante.

Théorème 3 *Soit u une solution de (6) définie sur $[0, +\infty[\times M$, et $\bar{u}(t)$ la moyenne de $u(x, t)$ sur M .*

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} = 0$$

De plus $0 \leq J(u)(t) \leq J(\mu_f)$.

Pour $\lambda < \lambda_2$, et pour $\sigma < J(\mu_f)$, soit φ une solution de

$$\varphi'' + \lambda\varphi - h(\varphi) = 0$$

d'énergie σ . Il existe un déphasage τ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - \varphi(t + \tau)\|_{C^2(M)} = 0$$

Quand la restriction sur λ n'est plus vérifiée, on peut simplement mettre en évidence, en nous inspirant de [6, Theorem 1], l'existence d'un attracteur maximal compact.

Théorème 4 *L'application $(u(0, \cdot), u_t(0, \cdot)) \mapsto (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$ définit un système dynamique sur $(W^{1,2}(M) \cap C(M)) \times L^2(M)$ qui possède un attracteur maximal compact $\mathcal{A}$ formé des solutions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

La caractérisation de cet attracteur reste encore un problème ouvert. Cependant, dans le cas où M admet un groupe régulier à un paramètre d'isométries, sous groupe de $O(M)$, ce qui est le cas si $M = S^n$ ($n \geq 1$), il existe des solutions globales de (6) constituées de "solitons elliptiques" ; ces solutions appartiennent à l'attracteur, ne sont pas de signe constant et ne sont pas homogènes.

2 Deuxième partie

Les résultats précédents sont-ils susceptibles de se généraliser aux solutions positives d'un système d'équation aux dérivées partielles elliptiques de la forme :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_M u + \alpha u &= f(u, v) \\ v_{tt} + \Delta_M v + \beta v &= g(u, v) \end{cases} \quad (9)$$

où f et g sont les dérivées partielles respectives $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ d'une fonction $G(x, y)$; cette hypothèse garantissant l'existence d'une constante d'énergie.

Ce type de système est étudié dans [1] dans le cas où $G = -u^p v^q$.

Notre premier objectif a été de chercher quelles hypothèses sur f et g permettent d'obtenir l'analogue des techniques de comparaison et de majoration de la première partie. On supposera que $G(x, y)$ est de la forme $G(x, y) = \frac{1}{2}H(x^2, y^2)$, où H est de classe C^2 convexe, $H_x(x, y)$ est une fonction croissante de x et décroissante de y et $H_y(x, y)$ est une fonction croissante de y et décroissante de x . En outre G satisfait certaines conditions de croissance.

Notre problème modèle est alors :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_M u + \alpha u &= 4u^3 - 2uv^2 \\ v_{tt} + \Delta_M v + \beta v &= 4v^3 - 2vu^2 \end{cases} \quad (10)$$

Ce système est tout à fait similaire à celui obtenu lors de l'étude d'un système d'équations de Ginzburg-Landau (d'inconnues f et A) [3]

$$\begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + A^2f = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\\ -A'' + f^2A = 0 & \text{dans }]0, +\infty[; \end{cases} \quad (11)$$

notre étude différant cependant par les conditions aux bords.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 5 *Toute solution (u, v) avec u et v positives de (9) converge dans $C^2(M)$, lorsque t tend vers $+\infty$, vers une solution positive (Φ_1, Φ_2) du problème stationnaire associé :*

$$\begin{cases} \Delta_M \Phi_1 + \alpha \Phi_1 - G_x(\Phi_1, \Phi_2) &= 0 \\ \Delta_M \Phi_2 + \beta \Phi_2 - G_y(\Phi_1, \Phi_2) &= 0 \end{cases} \quad (12)$$

lorsque G vérifie les hypothèses que nous avons énoncées.

Lorsque α et β sont tous deux supérieurs à λ_1 , (12) possède un unique couple de solutions stationnaires positives non nulles. Les méthodes de la première partie s'appliquent sans difficultés ; il en est de même lorsque α et β sont tous deux inférieurs à λ_1 car les seules solutions stationnaires sont identiquement nulles. Le point le plus délicat est celui où α et β encadrent λ_1 : la difficulté étant de caractériser les (α, β) pour lesquels il existe une solution stationnaire non nulle, et de relier cette condition à l'existence de solutions au problème de Dirichlet correspondant sur $[0, T] \times M$: on utilise pour cela le fait que ces solutions minimisent une fonctionnelle.

En guise de conclusion, on trouvera quelques résultats numériques, lorsque $M = [0, 1]$, fondés sur une résolution de (10) sur $[0, T]$ selon un schéma itératif. À partir d'un couple (u_n, v_n) , on détermine u_{n+1} en résolvant

$$u_{n+1,tt} + \Delta_M u_{n+1} + \alpha u_{n+1} = 4u_n^3 - 2u_n v_n^2$$

par la méthode des directions alternées, puis v_{n+1} à partir de

$$v_{n+1,tt} + \Delta_M v_{n+1} + \alpha v_{n+1} = 4v_n^3 - 2u_{n+1} v_n^2.$$

Les résultats numériques sont tout à fait en accord avec l'étude théorique, la méthode n'introduisant pas d'instabilité numérique.

3 Troisième Partie

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux propriétés globales des solutions positives de l'équation

$$u_{tt} + \Delta_M u - \lambda u + u^q = 0 \tag{13}$$

sur $M \times [0, +\infty[$ où (M, g) est une variété compacte sans bord de dimension n , Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M , λ une constante positive et $q > 1$. On notera, comme dans la première partie, λ_2 la première valeur propre strictement positive de $-\Delta_M$.

On associe à (13) l'équation différentielle

$$y'' - \lambda y + y^q = 0 \tag{14}$$

vérifiée par les solutions homogènes de (13).

L'équation possède un caractère conservatif puisque la fonction d'énergie

$$J(u) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M \left(-u_t^2 + |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \frac{2}{q+1} |u|^{q+1} \right)$$

est constante, indépendante de t . Le caractère conservatif implique l'existence de solutions positives particulières de type solitons elliptiques dès que M possède un sous-groupe à un paramètre régulier d'isométries. Par exemple, dans le cas où $M = S^1$, pour $(q-1)\lambda > 1$ ces solitons sont de la forme

$$u(x, t) = \omega(x + \alpha t)$$

pour $\alpha > 0$ assez petit. Ces solutions particulières ne sont évidemment pas homogènes.

Nos travaux ont trait à la recherche de conditions qui impliquent l'homogénéisation des solutions positives de (13). Une condition suffisante est l'estimation

$$q \|u\|_{L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)}^{q-1} \leq \lambda + \lambda_2. \quad (15)$$

Une estimation uniforme n'est pas évidente à obtenir ; cependant nous démontrons que pour $q < \frac{n+3}{n-1}$, il existe une constante $C = C(M, q)$ telle que toute solution bornée de (13) sur $M \times \mathbb{R}^+$ vérifie

$$\|u\|_{L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)} \leq C \lambda^{1/(q-1)} \quad (16)$$

En outre, un résultat de [4] montre que sous la condition $q < \frac{n+1}{n-1}$, les solutions de (13) sont bornées.

Les difficultés rencontrées dans la résolution de ce problème tiennent à plusieurs facteurs, qui sont d'ailleurs interdépendants :

- l'opérateur considéré n'est pas monotone
- il n'y a pas unicité de la solution positive du problème de Dirichlet sur un "pavé" $[0, T] \times M$.

- les solutions considérées sont instables, ce qui rend difficile toute approche numérique.
- pour une même donnée initiale $u(0)$, il peut y avoir des comportements radicalement différents des solutions.

Par exemple, correspondant à une même donnée initiale $u(x, 0) = \mu = \lambda^{1/(q-1)}$, on trouve

- la solution constante $u(x, t) = \mu$
- une solution décroissant exponentiellement vers 0
- une infinité de solutions homogènes (indépendantes de x) qui oscillent périodiquement autour de μ .

Dans le cas de S^1 , on montre, en utilisant le Théorème d'inversion locale, l'existence de solutions s'homogénéisant autour de n'importe quelle solution y_0 positive de (14). Ces résultats sont démontrés par analyse de Fourier, car la structure du problème linéarisé autour de y_0 est assez simple, à la différence de (13) où la non-linéarité conduit à un mélange quasi inextricable des diverses harmoniques. C'est ainsi que nous est venue l'idée de modifier le terme non-linéaire afin de permettre une meilleure approche, en imposant que les solutions homogènes restent solutions du problème modifié. C'est la même idée qui est mise en œuvre dans [7] pour un problème hyperbolique.

On étudie donc dans le cas modèle $M = S^1$, $q = 3$, les équations partiellement homogénéisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (E_1) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + (\bar{y})^3 = 0 \\ (E_2) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + y(\bar{y})^2 = 0 \\ (E_3) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + y \overline{y^2} = 0 \end{array} \right.$$

où la moyenne d'une fonction f sur S^1 est notée $\bar{y}$.

Nous démontrons que toutes les solutions positives de ces systèmes sont uniformément bornées.

Les comportements observés sont les suivants :

- Pour (E_1) : toutes les solutions s'homogénéisent.
- Pour (E_2) : toutes les solutions positives s'homogénéisent. De plus il n'existe pas de solitons.
- Pour (E_3) : toutes les solutions positives s'homogénéisent ; en outre il existe des solitons.

Références

- [1] Bidaut-Véron M.F., Raoux T. Propriétés locales des solutions d'un système elliptique non linéaire. *C. Acad. Sci. Paris.* à paraître.
- [2] Bidaut-Véron M.F., Véron L. Nonlinear elliptic equation on compact Riemannian Manifolds and asymptotics of Emden equations, *Invent. Math.* **106** (1991) 489-539.
- [3] Bolley C. Helffer B. Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit. *preprint*.
- [4] Bouhar M., Veron L. Integral Representation of Solutions of Semilinear Elliptic Systems in Cylinders and Applications, *Nonlinear Analysis* **23** (1994) 275-296.
- [5] Caffarelli L.A., Gidas B., Spruck J. Behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Applied Math.* **XLII** (1989) 271-297.
- [6] Calsina A., Mora X., Solà-Morales J. The Dynamical Approach to Elliptic Problems in Cylindrical Domains and a Study of their Parabolic Singular Limit, *Jl of Differential Equations* **102** (1993) 244-304 .
- [7] Cazenave T. Haraux A. et Weissler B. Une équation des ondes complètement intégrable avec non-linéarité homogène de degré trois. *C. Acad. Sci. Paris* , **t313**, Série I (1991) 237-241.
- [8] Chen X.Y., Matano H., Véron L. Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$, *Jl. Functional Anal.* **83** (1989) 50-97.

- [9] Matano H. Existence of nontrivial unstable sets for equilibriums of strongly order-preserving systems, *Jl. Fac. Sci. Tokyo* **30** (1983) 645-673.
- [10] Véron L. Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans L^1 , *Rev. Roum. Math. Pura Appl.* **27** (1982) 95-123.
- [11] Véron L. Singular solutions of some nonlinear elliptic equations, *Non-linear Anal.* **5** (1981) 225-242
- [12] Véron L. Comportement asymptotique des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires dans $\mathbb{R}^N$, *Ann. Mat. Pura Appl.* **127** (1981) 25-50.

ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF ASSOCIE A UNE EQUATION ELLIPTIQUE NON LINEAIRE

Jean-René LICOIS¹

Abstract

Soit M une variété Riemannienne compacte, h une fonction numérique de classe C^1 impaire telle que $h(r)/r$ est croissante et tend vers 0 en 0. On pose $f(r) = h(r) - \lambda r$ et on suppose qu'il existe des constantes positives A, B et un réel $p > 1$ tel que $f(r) > Ar^p - B$. On démontre que toute solution positive de $u_{tt} + \Delta_g u = f(u)$ sur $M \times \mathbb{R}^+$ avec $u \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$) sur ∂M tend vers la solution positive Φ du problème stationnaire associé $\Delta_g u = f(u)$. La convergence de u vers Φ est exponentielle.

Pour les solutions de signe quelconque, on montre un résultat d'homogénéisation de u quand λ n'est pas trop grand, puis on justifie que pour tout λ l'application $(u(0, \cdot), u_t(0, \cdot)) \mapsto (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$ définit un système dynamique sur $(W^{1,2}(M) \cap C(M)) \times L^2(M)$ qui possède un attracteur maximal compact.

¹Université de Tours — Faculté des Sciences et Techniques. Parc de Grandmont. 37200
Tours FRANCE

1 Introduction

1.1 Présentation

L'origine de notre travail est la suivante : dans l'étude des singularités en 0 de l'équation d'Emden-Fowler

$$\Delta u \pm cu/|x|^2 - u^q = 0$$

$x \in \mathbb{R}^N$ on effectue le passage aux coordonnées polaires $u(r, \alpha) = r^{\frac{2}{q-1}}v(t, \alpha)$ avec $t = \ln(r)$ et $\alpha \in S^{N-1}$ ce qui conduit à l'équation suivante

$$\Delta_S v + v_{tt} + (N - 2\frac{q+1}{q-1})v_t + (\frac{4}{(q-1)^2} \pm c)v - v^q = 0$$

dans $\mathbb{R} \times S^{N-1}$ avec Δ_S opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{N-1} . Les singularités de u au voisinage de $r = 0$ ou pour r infini amènent à étudier le comportement de v lorsque t tend vers l'infini. Lorsque l'exposant q est différent de la valeur critique $(N+2)/(N-2)$, le coefficient de v_t est non nul et joue le rôle d'un terme d'amortissement. La non-nullité de ce terme permet d'établir que

$$\int_0^\infty \int_{S^{N-1}} v_t^2 dt d\sigma < +\infty$$

d'où il découle facilement que v_t et v_{tt} tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Le comportement asymptotique de l'équation est bien connu [21, 22, 10] : v converge dans $C^3(S^{N-1})$, lorsque t tend vers l'infini, vers une partie compacte, connexe de l'ensemble des fonctions ω satisfaisant

$$-\Delta\omega + \omega|\omega|^{q-1} = (\frac{4}{(q-1)^2} \pm c)\omega.$$

Dans de nombreux cas, la limite se réduit à un singleton. Un survol des résultats disponibles figure dans [15].

Pour la valeur particulière $q = \frac{N+2}{N-2}$, le coefficient du terme d'amortissement v_t est nul, ce qui correspond à :

$$\Delta v + v_{tt} + \lambda v - v^{\frac{N+2}{N-2}} = 0 \tag{1}$$

en posant $\lambda = (\frac{(N-2)^2}{4} \pm c)$. On doit alors chercher de nouvelles méthodes qui tiennent compte du caractère conservatif de l'équation vérifiée par v . Dans

un contexte différent, l'étude des transformations conformes de $\mathbb{R}^N$ conduit à l'équation

$$-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

En effectuant le même changement de variables que précédemment, on en déduit l'équation conservative

$$v_{tt} + \Delta_S v - \left(\frac{N-2}{2N}\right)^2 + v^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$$

En utilisant une technique de symétrie en mesure, les asymptotiques des solutions sont caractérisées dans [9].

Il nous a paru intéressant de considérer l'équation (1) dans un cadre plus général.

1.2 Notations

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte pour la métrique g , avec ou sans bord, Δ_g le laplacien ainsi défini sur M . Considérons l'équation

$$u_{tt} + \Delta_g u = f(u) \tag{2}$$

où f est une fonction de la forme $f(u) = h(u) - \lambda u$. vérifiant :

h1 Il existe un réel $p > 1$ et deux constantes A et B positives telles que $f(r) > Ar^p - B$.

h2 $h(r)/r$ est une fonction strictement croissante de r .

h3 $h(r)/r \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$.

h4 h est impaire.

h5 h est de classe C^1 .

Si $\lambda > 0$, f ne s'annule qu'une fois sur $]0, +\infty[$ pour un réel noté μ_f .

Le "modèle" est celui où h est une fonction puissance $r \mapsto r|r|^{p-1}$.

On notera Ω le cylindre $\overset{\circ}{M} \times]0, +\infty[$, Ω_T l'ouvert $\overset{\circ}{M} \times]0, T[$, $K_T = \overline{\Omega_T}$, $K = \overline{\Omega}$.

Lors de l'étude des solutions de (2) sur Ω , les conditions au bord de M seront définies respectivement par

BV $\partial M = \emptyset$, M variété compacte sans bord

BD $\partial M \neq \emptyset$ et $u \equiv 0$ sur ∂M

BN $\partial M \neq \emptyset$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$ sur ∂M .

On notera λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_g$ avec les conditions au bord correspondantes, ϕ désignera une fonction propre associée ; si $\partial M = \emptyset$, ou dans le cas **BN**, $\lambda_1 = 0$ associée aux fonctions constantes. En outre sur K_T nous imposerons des conditions en $t = 0$ et $t = T$. Enfin on ne considèrera comme solutions du problème que des fonctions appartenant à $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, et comme sous-solutions (resp. sur-solutions) des fonctions dans $C(\overline{\Omega}) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

1.3 Résultats

Notre résultat essentiel est le suivant :

Théorème 1 *Lorsque $\lambda > \lambda_1$, toute solution positive du problème (2) sur Ω avec une des conditions au bord **BV**, **BD**, **BN** converge dans $C^2(M)$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers l'unique fonction strictement positive Φ qui vérifie :*

$$\Delta_g \Phi - f(\Phi) = 0 \quad (3)$$

avec les conditions au bord correspondantes.

La notation Φ pour désigner la solution *positive* de (3) avec les conditions aux bords voulues sera employée tout au long de cet article.

Remarquons que lorsque $\partial M = \emptyset$ ou lorsque les conditions au bord sont les conditions de Neumann, la fonction Φ est simplement la constante μ_f telle que $f(\mu_f) = 0$.

On montrera que pour toute donnée initiale $u_0 \in C(M)$ positive compatible avec les conditions au bord il existe une *unique* solution *positive* sur Ω qui vérifie $u(x, 0) = u_0(x)$.

On peut déjà remarquer que la nullité du coefficient d'amortissement dans (2) entraîne la conservation de l'énergie : en multipliant (2) par u_t et en intégrant sur M , on a immédiatement :

Proposition 1.1 : Soit u une solution de (2) définie sur $M \times [0, T]$, alors l'expression suivante :

$$J(u)(t) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \left(- \int_M u_t^2 + \int_M \nabla u^2 + 2 \int_M F(u) \right) \quad (4)$$

où F désigne la primitive de f nulle en 0, est indépendante de $t \in [0, T]$.

Une question souvent associée au comportement asymptotique des solutions (voir par exemple [17]) est celle de la connexion des états stationnaires, ou l'existence de solutions globales de (2).

Etant données deux solutions du problème stationnaire (3) Ψ_1 et Ψ_2 , on dit qu'une solution v de (2) définie pour tout t est une connexion, ou orbite connectante, entre Ψ_1 et Ψ_2 si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(., t) = \Psi_2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(., t) = \Psi_1.$$

Si une solution $u(x, t)$ connecte Ψ_1 et Ψ_2 , alors $v_t \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow +\infty$, et la Proposition 1.1 montre que Ψ_1 et Ψ_2 doivent avoir la même "énergie"

$$\text{vol}(M)J(\Psi) = \int_M (|\nabla \Psi_1|^2 + 2F(\Psi_1)) = \int_M (|\nabla \Psi_2|^2 + 2F(\Psi_2)).$$

La solution stationnaire positive Φ est définie comme réalisant le minimum de l'énergie $J(\Phi)$ (cf paragraphe 3.4) donc Φ ne peut être connectée qu'avec elle-même ou $-\Phi$.

Dans le premier cas la fonction $v(x, t) = \Phi(x)$ réalise la connexion ; pour le deuxième nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2 *Il existe une solution de (2) qui réalise une connexion entre Φ et $-\Phi$.*

Remarquons que le théorème de Matano [17, Theorem 8] ne s'applique pas ici, car la solution nulle est "entre" les deux états stationnaires Φ et $-\Phi$.

Lorsque (M, g) possède des symétries, comme par exemple S^n ou $[0, 1]$, il est possible de connecter des états stationnaires changeant de signe si l'on peut se ramener à des fonctions de signe constant. Si G est un sous-groupe fini du groupe orthogonal $O(N)$, G est engendré par un nombre fini de réflexions par rapport à des hyperplans (H_k) , qui divisent $\mathbb{R}^N$ en un nombre fini de

polyèdres. Ces polyèdres sont tous égaux et G agit de façon transitive sur eux. Dans le cas de S^{N-1} , ces polyèdres définissent un pavage à l'aide de simplexes sur lesquels G agit transitivement. Soit S un de ces simplexes. Si λ est assez grand, on peut trouver une solution positive Φ_S du problème stationnaire sur S , nulle sur ∂S . On prolonge ensuite Φ_S en une fonction Ψ définie sur S^{N-1} à l'aide de la formule

$$\Psi|_{S_i} = \det(g_i)\Phi_S \circ g_i^{-1}$$

si $S_i = g_i(S)$ pour un certain $g_i \in G$. En connectant Φ_S à $-\Phi_S$, on obtient selon le même procédé une connexion entre Ψ et $-\Psi$.

Ces résultats sont obtenus en construisant, à l'aide du principe du maximum, des sous- et sur-solutions de (2).

La simplicité du comportement des solutions *positives* de (2) nous amène à envisager celui des solutions de signe quelconque.

Le problème est d'une bien plus grande complexité : les arguments liés à l'unicité des solutions ou à la monotonie de l'opérateur ne peuvent plus s'appliquer puisqu'on peut montrer l'existence d'ondes solitaires (solitons elliptiques).

Cependant, dans le cas où $\lambda \leq \lambda_2$, avec les conditions au bord **BV** ou **BN** on montre des résultats d'homogénéisation asymptotique ; en particulier

Théorème : *Soit u une solution de (2) définie sur $[0, +\infty[\times M$, et $\bar{u}(t)$ la moyenne de $u(x, t)$ sur M .*

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} = 0$$

De plus $0 \leq J(u)(t) \leq J(\mu_f)$.

Pour $\lambda < \lambda_2$, et pour $\sigma < J(\mu_f)$, soit φ une solution de (26) d'énergie σ . Il existe un déphasage τ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - \varphi(t + \tau)|_{C^2(M)} = 0$$

Quand cette restriction sur λ n'est plus vérifiée, on peut simplement mettre en évidence, en nous inspirant de [8, Theorem 1], l'existence d'un attracteur maximal compact.

Théorème 3 *L'application $(u(0, \cdot), u_t(0, \cdot)) \mapsto (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$ définit un système dynamique sur $(W^{1,2}(M) \cap C(M)) \times L^2(M)$ qui possède un attracteur maximal compact $\mathcal{A}$ formé des solutions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

La caractérisation de cet attracteur reste cependant un problème ouvert.

Table des matires

1	Introduction	I-2
1.1	Présentation	I-2
1.2	Notations	I-3
1.3	Résultats	I-4
2	Premières Propriétés	I-8
2.1	La première valeur propre	I-8
2.2	Unicité et monotonie	I-9
2.3	Majoration a priori	I-11
2.4	Existence des solutions	I-13
3	Etude des solutions positives	I-15
3.1	Minoration des solutions	I-15
3.2	Majoration des solutions	I-17
3.3	Démonstrations	I-19
3.4	Décroissance exponentielle	I-20
4	Solutions de signes quelconques	I-23
4.1	Homogénéisation	I-23
4.2	Unicité	I-28
4.3	Systèmes dynamiques	I-32
4.4	Dépendance continue et attracteur	I-34
A	Principe de comparaison	I-37
B	Régularité des solutions d'équations elliptiques	I-38

2 Premières Propriétés

On rappelle que dans tous les noncs, les solutions considres satisfont sur ∂M les conditions **BV**, **BD** ou **BN**.

2.1 La première valeur propre

Proposition 2.1 *Si $\lambda \leq \lambda_1$ toute solution du problème stationnaire (3) sur M est identiquement nulle.*

DÉMONSTRATION : On multiplie par u et on intègre sur M

$$\int_M u \Delta_g u + \int_M \lambda u^2 = \int_M h(u) u$$

Compte tenu de la parité de h , le terme de droite est positif ; il est strictement positif si $u \not\equiv 0$ puisque h ne s'annule qu'en 0 d'après **h2**. Dans le terme de gauche, la première intégrale vaut

$$- \int_M (\nabla u)^2 + \int_{\partial M} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \cdot u \right).$$

Les contributions aux bords sont toujours nulles. Par définition de λ_1 la quantité

$$\int_M u \Delta_g u + \int_M \lambda u^2$$

est négative. D'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.2 *Soit T un réel strictement positif. Si $\lambda < \lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}$, toute solution positive de (2) sur Ω_T nulle en $t = 0$ et $t = T$ est identiquement nulle.*

DÉMONSTRATION : Multiplions l'équation par $\Psi = \phi \sin(\pi t/T)$ où ϕ désigne la première fonction propre de $-\Delta_g$ et intégrons sur Ω_T

$$\int_M \int_0^T \Psi (\Delta_g u + u_{tt}) - \lambda \int_M \int_0^T \Psi u + \int_M \int_0^T \Psi h(u) = 0.$$

La première intégrale vaut alors

$$\int_M \int_0^T \Psi (u_{tt} + \Delta_g u) = -(\lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}) \int_M \int_0^T \Psi u.$$

Comme $\lambda < \lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}$, $\int_M \int_0^T \Psi (u_{tt} + \Delta_g u) - \lambda \int_M \int_0^T \Psi u$ est positif, d'où la conclusion puisque Ψ et u sont positives. $\square$

2.2 Unicité et monotonie

Proposition 2.3 *Soient u et v deux solutions positives de (2) continues sur K_T , telles que*

$$\forall x \in M \quad u(x, 0) \leq v(x, 0) \quad \text{et} \quad u(x, T) \leq v(x, T)$$

On a alors $u \leq v$ sur Ω_T .

DÉMONSTRATION :

ETAPE 1 Soient y et z deux fonctions strictement positives sur $\Gamma = [t_1, t_2] \times M$, appartenant à $C^0(\Gamma) \cap C^2(\overset{\circ}{\Gamma})$. En appliquant la formule de Green, on montre facilement, c.f. [3],

$$\begin{aligned} & \int_M \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{y_{tt} + \Delta_g y}{y} - \frac{z_{tt} + \Delta_g z}{z} \right) (y^2 - z^2)^+ = \\ & - \int_M \int_{t_1}^{t_2} \text{sgn}^+(y^2 - z^2) \{ (zy_t - yz_t)^2 + (z\nabla y - y\nabla z)^2 \} (y^{-2} + z^{-2}) + \\ & \int_{\partial\Gamma} \frac{(y^2 - z^2)^+}{y} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma + \int_{\partial\Gamma} \frac{(y^2 - z^2)^+}{z} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

ETAPE 2 Supposons que deux solutions positives u et v vérifient sur Ω_T

$$u_{tt} + \Delta_g u + \lambda u = h(u) \quad (6)$$

$$v_{tt} + \Delta_g v + \lambda v = h(v). \quad (7)$$

D'après le principe du maximum, u et v sont strictement positives à l'intérieur de Ω_T . Afin d'éviter les problèmes liés à la nullité au bord, en particulier dans le cas **BD**, soit $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = u + \varepsilon$ et $v_\varepsilon = v + 2\varepsilon$. D'après la continuité de u et v en $t = 0$ et $t = T$, il existe un réel $\tau > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \tau] \cup [T - \tau, T] \quad (u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+(\cdot, t) \equiv 0.$$

Dans le cas **BD** la fonction $(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+$ reste identiquement nulle sur $\partial M \times [0, T]$ pour les mêmes raisons. On a donc :

$$(u_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = h(u) + \lambda \varepsilon \quad (8)$$

$$(v_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon = h(v) + 2\lambda \varepsilon. \quad (9)$$

On peut donc multiplier (8) par $\frac{(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+}{u_\varepsilon}$ et (9) par $\frac{(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+}{v_\varepsilon}$ et faire la différence ; on obtient après intégration

$$\begin{aligned} \int_M \int_0^T \Theta(x, t) &= \int_M \int_0^T (h(u)/u_\varepsilon - h(v)/v_\varepsilon)(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+ + \\ &\quad \int_M \int_0^T \lambda(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+ \left(\frac{\varepsilon}{u_\varepsilon} - 2\frac{\varepsilon}{v_\varepsilon} \right) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (10)$$

avec

$$\Theta(x, t) = ((u_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g u_\varepsilon) \frac{(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+}{u_\varepsilon} - ((v_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g v_\varepsilon) \frac{(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2)^+}{v_\varepsilon}. \quad (11)$$

L'intégrale de Θ se calcule à l'aide du lemme 5 en remarquant que dans tous les cas les contributions aux bords sont nulles : on obtient alors une quantité négative. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la quantité $I_1 + I_2$ a une limite positive. En effet, par convergence dominée, I_1 a pour limite

$$\int_M \int_0^T \left(\frac{h(u)}{u} - \frac{h(v)}{v} \right) (u^2 - v^2)^+$$

qui est positif car $h(r)/r$ est croissante. Pour I_2 ,

$$\left| \frac{\varepsilon}{u_\varepsilon} - 2\frac{\varepsilon}{v_\varepsilon} \right| \leq 3$$

puisque u et v sont positifs. Le théorème de convergence dominée montre que $I_2 \rightarrow 0$.

Les quantités $I_1 + I_2$ et $\int \int \Theta$ étant de signe contraire sont donc identiquement nulles, d'où $u \geq v$. $\square$

Corollaire 2.4 *Il y a unicité de la solution positive du problème (2) sur un domaine K_T lorsqu'en $t = 0$ et $t = T$, on impose les conditions aux bords $u = v$ ou $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$.*

DÉMONSTRATION : Si $u = v$ au bord, on applique le principe de comparaison précédent une fois avec $u \leq v$ et une fois avec $v \leq u$.

Si $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ au bord, on reprend la démonstration de la proposition en remplaçant $(u^2 - v^2)^+$ par $(u^2 - v^2)$; les contributions aux bords sont toujours nulles. $\square$

Corollaire 2.5 *La solution u de (2) sur K_T vérifiant $u(0, \cdot) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n}(T, \cdot) = 0$ coïncide avec celle du problème (2) sur $M \times [0, 2T]$ nulle aux bords $t = 0$ et $t = T$.*

Corollaire 2.6 *Le résultat de la Proposition 2.3 reste vrai si on remplace l'hypothèse v solution par v sur-solution de (2) (resp. u solution par u sous-solution de (2)) appartenant à $C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$.*

2.3 Majoration a priori

Etablissons une majoration a priori, de type Ossermann et Keller [18], des solutions de (2).

Lemme 2.7 *Soit v une solution de l'équation différentielle ordinaire*

$$v'' = f(v) \quad (12)$$

(f désignant toujours la non-linéarité du problème (2)) sur l'intervalle $]0, 2a[$. Il existe deux constantes C et D positives, ne dépendant que de f , telles que

$$v(a) < C a^{-\frac{2}{q-1}} + D.$$

DÉMONSTRATION : Posons

$$k(t) = a^2 - (t - a)^2 \quad (13)$$

$$w(t) = k(t)^{-\frac{2}{q-1}}. \quad (14)$$

On a

$$w''(t) = \frac{4}{q-1} k(t)^{-\frac{q+1}{q-1}} + 8 \frac{q+1}{(q-1)^2} (a-t)^2 k(t)^{-\frac{2q}{q-1}}.$$

Cherchons une sur-solution de (12) sous la forme $y(t) = C_1 w(t) + D$ où C_1 et D sont des constantes à déterminer. Compte tenu de **h1**, y est sur-solution si $B \leq -y'' + A y^q$, A et B étant définies par l'hypothèse **h1**. Il suffit que $B \leq -y'' + A C_1 w^q + A D^q$, ou encore

$$0 \leq -\left\{ \frac{4C_1}{q-1} k(t) + \frac{8C_1(q+1)}{(q-1)^2} \right\} (a-t)^2 + A C_1^q \quad (15)$$

$$B \leq A D^q. \quad (16)$$

La deuxième condition donne immédiatement $D = (\frac{B}{A})^{\frac{1}{q}}$; la première est réalisée pour

$$\frac{a^2}{A} \frac{4(2+q)}{(q-1)^2} \leq C_1^{q-1}.$$

D'après la Proposition 2.3 on a donc, si v est solution de (12)

$$v(t) \leq y(t) \quad \forall t \in]0, 2a[$$

et en particulier

$$v(a) \leq y(a) = C a^{-\frac{2}{q-1}} + D$$

avec $C = (\frac{4(q+2)}{A(q-1)^2})^{\frac{1}{q-1}}$. $\square$

REMARQUE : Dans le cas où $h(r) = r|r|^{q-1}$ on peut choisir $A = \frac{q-1}{q}$ et $B = A \lambda^{\frac{p}{p-1}}$ dans **h1** ; on obtient alors $D = \lambda^{\frac{1}{q-1}}$ qui est justement le réel μ_f solution de $f(\mu_f) = 0$.

Proposition 2.8 *Toute solution u du problème (2) sur $M \times [0, 2T]$ vérifie*

$$\forall t \in]0, T] \quad u(x, t) < D + C t^{-\frac{1}{q-1}} \quad (17)$$

où C et D sont définies ci-dessus.

DÉMONSTRATION : On applique le Corollaire 2.6 aux fonctions u et $Y(x, t) = y(t)$ où y est définie ci-dessus. $\square$

Proposition 2.9 *Lorsque u est une solution de (2) sur Ω_T qui admet son maximum en (x_m, t_m) avec $t_m \in]0, T[$, on a*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \mu_f.$$

DÉMONSTRATION : Dans le cas **BV**, **BD** le point est intérieur au domaine, dans le cas **BN** si $x_m \in \partial M$ on peut faire un prolongement par réflexion et se ramener au cas où le point est intérieur. En un maximum intérieur, $u_{tt} + \Delta_g u$ est négatif, $f(u)$ aussi, donc le maximum de u est majoré par le zéro μ_f de f . $\square$

2.4 Existence des solutions

On peut montrer l'existence de solutions de (2) sur Ω_T lorsque $\lambda > \lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}$ de diverses manières : en utilisant les techniques de bifurcations à partir de λ_1 , par des méthodes de point fixes [13], ou en se ramenant à deux équations paraboliques couplées [8].

Nous rappelons que toutes les solutions considérées satisfont sur ∂M les conditions **BV**, **BD** ou **BN**.

On notera $\overline{\nabla} = \partial/\partial t + \nabla_M$ le gradient total.

Proposition 2.10 *Le problème (2) avec conditions de Dirichlet en $t = 0$ et $t = T$ admet une solution sur K_T .*

DÉMONSTRATION : Procédons par minimisation d'une fonctionnelle définie sur un espace X . Dans le cas **BD** on prend $X = H_0^1(K_T)$, dans le cas **BV**, **BN** on prend $X = \{u \in H^1(K_T) | u(x, 0) = u(x, T) = 0\}$. Soit F la primitive de f nulle en 0 et J la fonctionnelle définie sur X par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \overline{\nabla} u^2 + \int_{\Omega_T} F(u). \quad (18)$$

Si la dernière intégrale n'existe pas, on pose $J(u) = +\infty$. Compte tenu de **h1** on a

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \overline{\nabla} u^2 + A \int_{\Omega_T} \frac{u^{p+1}}{p+1} - B \int_{\Omega_T} u.$$

D'après l'inégalité de Jensen appliquée à $r \mapsto A \frac{r^{p+1}}{p+1} - Br$, $J(u)$ est bornée inférieurement. Soit $\mu = \inf\{J(u) | u \in X\}$ et (u_n) une suite minimisante. La suite (u_n) est bornée dans $W^{1,2}$ sinon $\int u_n^2$ et $\int \overline{\nabla} u_n^2$ tendent simultanément vers l'infini ainsi que $J(u_n)$. On peut extraire de (u_n) une suite qui converge faiblement dans $W^{1,2}$ vers une fonction u . Soit

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} |\overline{\nabla} u|^2 \text{ et } G(u) = \int_{\Omega_T} F(u).$$

L est semi-continue inférieurement et convexe donc

$$\liminf L(u_n) \geq L(u).$$

Puisque F est continue, $\lim G(u_n) = G(u)$, d'où $J(u) \leq \mu$ et donc $J(u) = \mu$. Selon un argument classique, u est alors solution de l'équation d'Euler

associée à J , c'est-à-dire de (2) avec les conditions au bord correspondantes. De plus $J(|u|) = J(u)$: on peut choisir u de signe constant. Pour justifier que u n'est pas identiquement nulle, montrons que J prend des valeurs négatives. Soit Ψ est la première fonction propre déjà utilisée à la Proposition 2.2.

$$J(k\Psi) = Ck^2 + D$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \Psi|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \lambda \Psi^2$$

qui est négatif (d'après l'inégalité de Poincaré) et

$$D_1 = \int_{\Omega_T} H(k\Psi)$$

où H désigne la primitive de h nulle en 0. D'après **h3**, $H(r) = o(r^2)$; on peut donc trouver un réel k assez petit pour que $C_1 k^2 + D_1$ soit négatif. $\square$

Proposition 2.11 *Soient u_0, u_1 continues sur M , nulles au bord dans le cas BD, et $T > 0$ donnés. Il existe une solution u de (2) sur K_T telle que :*

$$\forall x \in M \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u(x, T) = u_1(x).$$

De plus si $u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$, u est positive sur K_T .

DÉMONSTRATION : Soit γ le relèvement "harmonique" de u_0 et u_1 sur K_T , c'est-à-dire la solution de

$$\begin{cases} \gamma_{tt} + \Delta_g \gamma &= 0 \\ \gamma(x, 0) &= u_0(x) \\ \gamma(x, T) &= u_1(x) \end{cases}$$

dont l'existence ne pose aucun problème ; il suffit, par exemple, de procéder par décomposition de Fourier sur les sous-espaces propres de Δ_g . Il est facile de voir que $\gamma \in C^0(K_T) \cap C^{2,\alpha}([0, T] \times M)$. On définit la même fonctionnelle que ci-dessus, mais cette fois sur l'ensemble $\gamma + X$. Le minimum obtenu répond à la question. On montre de même que u est de signe constant. $\square$

3 Etude des solutions positives

On démontre le Théorème 1 en distinguant deux cas : d'abord $\lambda > \lambda_1$ puis $\lambda \leq \lambda_1$. Sauf mention explicite du contraire, on suppose donc $\lambda > \lambda_1$ et T assez grand pour qu'il existe des solutions du problème de Dirichlet sur Ω_T . Lorsqu'on résoudra un problème sur Ω_T on ne précisera pas les conditions sur le bord $\partial M \times [0, T]$ puisqu'elles découlent de **BV**, **BD**, **BN**.

3.1 Minoration des solutions

Comme conséquence immédiate du principe de comparaison (2.3) on a :

Proposition 3.1 *Soit $v \in C^0(K_T) \cap C^2(\Omega_T)$ une solution positive de (2) sur Ω_T , et u la solution de (2) sur K_T nulle en $t = 0$ et $t = T$. On a alors :*

$$u \leq v \quad \text{sur } \Omega_T.$$

Nous allons maintenant définir une solution positive "minimale" α du problème (2) sur Ω . Cette solution minimale sera croissante et convergera à l'infini vers la solution Φ du problème stationnaire.

Pour $T > 0$, soit $u^T(x, t)$ la solution de (2) définie sur $M \times [0, T]$, nulle pour $t = 0$ et $t = T$, prolongée par 0 sur $M \times [T, +\infty]$.

Proposition 3.2 *Il existe une fonction positive α , solution de (2) sur Ω , telle que pour $(x, t) \in \Omega$ fixé, la famille $u^T(x, t)$ converge en croissant vers $\alpha(x, t)$ lorsque T tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : La Proposition 3.1 montre que $u^T \leq u^{T'}$ si $T \leq T'$ et la Proposition 2.9 que u^T est majorée par μ_f . La suite (u^n) converge donc ponctuellement vers une fonction α positive. Soit T arbitraire ; pour $n > T$, les solutions u^n appartiennent à un borné de $C^{2,\beta}(\Omega_T)$. L'injection de $C^{2,\beta}(\Omega_T)$ dans $C^2(\Omega_T)$ (munis de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω_T) étant compacte, il existe une suite extraite qui converge dans $C^2(\Omega_T)$ vers α , donc la restriction de α à Ω_T est solution de (2). $\square$

Proposition 3.3 *Pour tout t, σ positifs, on a : $\alpha(t, \cdot) \leq \alpha(t + \sigma, \cdot)$.*

DÉMONSTRATION : Choisissons un réel T et un réel $\beta > \sigma$; posons $v(t, \cdot) = u^{T+\beta}(t + \sigma, \cdot)$. La fonction $v(t, \cdot)$ est définie pour $-\sigma < t < T + \beta + \sigma$. Pour $t = 0$, $v(0, \cdot) \geq 0$ et pour $t = T$, $v(T, \cdot) \geq 0$; d'après le principe de comparaison sur Ω_T on a donc $v(t, \cdot) \geq u^T(t, \cdot)$ soit encore

$$u^{T+\beta}(t + \sigma) \geq u^T(t, \cdot).$$

En faisant tendre T vers l'infini, on obtient $\alpha(t + \sigma, \cdot) \geq \alpha(t, \cdot)$. $\square$

Proposition 3.4 *Soit $y(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(x, t)$. La fonction y est une solution positive de $\Delta_g y = f(y)$ qui est nécessairement égale à Φ .*

DÉMONSTRATION : Pour x fixé, $y(x)$ est limite monotone de $\alpha(t, x)$ lorsque t tend vers l'infini. Par compacité et unicité de la limite, il existe une suite t_n tendant vers l'infini, telle que $\alpha(t_n, \cdot)$ converge dans $C^2(M)$ vers y . Passons à la limite faible dans l'équation (2). Soit ξ une fonction C^∞ à support strictement inclus dans $[0, 1]$. Multiplions par ξ la relation de définition de α et intégrons entre 0 et 1.

$$\int_0^1 \alpha_{tt}(x, t + \tau) \xi(\tau) d\tau = \int_0^1 (f(\alpha(x, t + \tau)) - \Delta_g \alpha(x, t + \tau)) \xi(\tau) d\tau.$$

Le terme de gauche est égal à

$$\int_0^1 \alpha(x, t + \tau) \xi_{tt}(\tau) d\tau.$$

En faisant tendre t vers l'infini, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \alpha(x, t + \tau) \xi_{tt}(\tau) d\tau = y(x) \int_0^1 \xi_{tt}(\tau) d\tau = 0 \quad (19)$$

puisque ξ est à support compact. De même :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 (\Delta_g \alpha(x, t + \tau) - f(\alpha(x, t + \tau))) \xi(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 (\Delta_g y(x) - f(y(x))) \xi(\tau) d\tau \\ &= (\Delta_g y(x) - f(y(x))) \int_0^1 \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La nullité de cette dernière expression (d'après (19)) montre que y est une solution positive du problème stationnaire qui est donc égale à Φ . $\square$

On obtient comme corollaire de cette proposition la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2 : en effet le prolongement $\tilde{\alpha}$ par réflexion autour de $t = 0$ de la fonction α fournit la connexion cherchée puisque

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\alpha}(x, t) = -\Phi \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}(x, t) = +\Phi.$$

REMARQUE Les fonctions "translatées" $\tilde{\alpha}(x, t + t_0)$ constituent évidemment une famille de connections entre Φ et $-\Phi$.

Les techniques précédentes de comparaison montrent immédiatement que toute solution u positive de (2) sur Ω est minorée par α : avec les notations précédentes la Proposition 3.1 entraîne $u \geq u^n$ pour tout n , et donc par passage à la limite $u \geq \alpha$.

3.2 Majoration des solutions

Cherchons une fonction β majorante possédant des propriétés de monotonie et de convergence analogues à celles de α .

Lemme 3.5 *Pour k assez grand, la fonction y_k définie dans le cas **BD** par $k\sqrt{\phi}$ et dans le cas **BV**, **BN** par $y_k(x) = k$ est une sur-solution du problème stationnaire (3).*

DÉMONSTRATION : Dans le cas **BV**, **BN** on choisit k tel que $f(k) > 0$. Dans le cas **BD**, on a $y_k(x) = k\sqrt{\phi}$ (où ϕ désigne toujours la première fonction propre de Δ_g sur M) et

$$\Delta_g \sqrt{\phi} = \frac{\Delta_g \phi}{2\sqrt{\phi}} - \frac{|\nabla \phi|^2}{4\phi^{3/2}}.$$

Donc

$$\Delta_g y_k - f(y_k) = \{(\lambda_1 + \lambda)k\phi - \frac{k|\nabla \phi|^2}{2\phi} - 2\sqrt{\phi}h(k\sqrt{\phi})\}/2\sqrt{\phi}.$$

D'après le lemme de Hopf, $|\nabla \phi|^2$ n'est pas nul sur ∂M ; il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $(\lambda_1 + \lambda)k\phi - \frac{k|\nabla \phi|^2}{2\phi}$ est négatif pour x voisin de ∂M avec $\phi(x) < \varepsilon$, et ceci quelque soit k .

Pour les x tels que $\phi(x) > \varepsilon$, choisissons la constante k telle que

$$2\sqrt{\phi} h(k\sqrt{\phi}) > (\lambda_1 + \lambda)k\phi \quad (20)$$

ou encore

$$\frac{h(k\sqrt{\phi})}{k\sqrt{\phi}} > (\lambda_1 + \lambda)/2$$

ce qui est toujours possible puisque les hypothèses sur f et h montrent que $h(r)/r$ tend vers $+\infty$. On construit bien ainsi une fonction y_k sur-solution du problème. $\square$

Lorsqu'on utilisera une fonction y_k dans la suite, on supposera implicitement que k satisfait soit (20), soit $f(k) > 0$, selon les conditions au bord.

Pour T assez grand, soit U^T la solution de (2) définie sur $M \times [0, T]$ avec $U^T(x, 0) = U^T(x, T) = y_k(x)$ et prolongée à $M \times [0, +\infty[$ par $U^T(x, t) = y_k(x)$ pour $t > T$. La fonction U^T est à valeurs positives.

Lemme 3.6 *Pour toute fonction U^T ainsi définie, on a :*

$$\forall x \in M \quad \forall t \in [0, T] \quad U^T(x, t) \leq y_k(x).$$

DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer le Corollaire 2.6 puisque y_k est une sur-solution du problème. $\square$

Proposition 3.7 *Il existe une fonction positive β_k , solution de (2) sur Ω , telle que pour $(x, t) \in \Omega_T$ fixé, la famille $U^T(x, t)$ converge en décroissant vers $\beta_k(x, t)$ lorsque T tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : Le principe de comparaison et le lemme précédent montrent que $U^T \geq U^{T'}$ si $T \leq T'$. La suite (U^n) converge donc ponctuellement vers une fonction β_k positive. On montre, comme dans la Proposition 3.2, que la restriction de β_k à Ω_T est solution de (2). $\square$

Proposition 3.8 *Pour tout t, σ positifs, on a : $\beta_k(t, \cdot) \geq \beta_k(t + \sigma, \cdot)$.*

DÉMONSTRATION : Elle est analogue à celle de la proposition 3.3. $\square$

Proposition 3.9 *Soit $y(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_k(x, t)$. La fonction y est une solution positive de $\Delta_g y = f(y)$ qui est nécessairement égale à Φ .*

DÉMONSTRATION : Elle est analogue à celle de la proposition 3.4 : on multiplie par une fonction test et on passe à la limite faible. $\square$

3.3 Démonstrations

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1 lorsque $\lambda > \lambda_1$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 : Compte tenu de l'estimation de la Proposition 2.8 il existe un instant t_0 , tel que pour $t > t_0$, $u(x, t) < D + 1$. Dans le cas **BV**, **BN**, il est facile de déterminer k , avec $f(k) > 0$, afin que pour $t > t_0$

$$u(x, t) \leq y_k(x) = k.$$

Dans le cas **BD**, les estimations de Schauder montrent que u est bornée dans $C^2([T - 1, T + 1] \times M)$ uniformément par rapport à T pour T assez grand ; donc $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t)$ est uniformément majoré, pour t assez grand et pour $x \in \partial M$. Puisque $\frac{\partial y_k}{\partial n}(x) = k \frac{\partial \phi}{\partial n}(x)$: il existe k_0 et $\varepsilon > 0$ tel que $u(x, t) < y_k(x)$ si $d(x, \partial M) < \varepsilon$, $k > k_0$, $t > t_0$. Quitte à augmenter encore k , puisque u est uniformément bornée, on peut trouver $k > 1$ tel que :

$$\forall t > t_0 \quad \forall x \in M \quad u(x, t) \leq y_k(x).$$

Par translation en temps, puisque le problème est autonome, on se ramène dans les deux cas à

$$\forall t \geq 0 \quad u(x, t) \leq y_k(x).$$

Lemme 3.10 On a : $u(x, t) \leq \beta_k(x, t)$.

DÉMONSTRATION : D'après le principe de comparaison, u est inférieure à chacune des fonctions U^T ; en passant à la limite $u \leq \beta_k$. $\square$

Comme nous avons aussi

$$\alpha(x, t) \leq u(x, t)$$

on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_k(x, t) = \Phi(x) \quad . \quad \square$$

3.4 Décroissance exponentielle

Considérons la fonctionnelle $J(z)$ définie par

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla z|^2 + 2H(z) - \lambda z^2)$$

où H désigne la primitive de h nulle en 0. Le minimum de cette fonctionnelle est atteint pour la fonction Φ solution du problème stationnaire (3). La fonction $k \mapsto J(\Phi + kz)$ possède un minimum pour $k = 0$; sa dérivée seconde (par rapport à k) évaluée en 0 est donc positive ou nulle, ce qui conduit à la relation

$$0 \leq \int_M (|\nabla z|^2 + z^2 h'(\Phi) - \lambda z^2) = JR(z).$$

La fonctionnelle JR est homogène de degré 2 ; soit μ le minimum de JR sur la boule unité de $H^1(M)$ atteint pour une fonction φ (que l'on peut choisir positive) solution du problème linéaire

$$\Delta_g \varphi + (h'(\Phi) - \lambda)\varphi = \mu\varphi. \quad (21)$$

Lemme 3.11 *μ est strictement positive.*

DÉMONSTRATION : Supposons le contraire ($\mu = 0$) et soit ξ une fonction test. D'après (21)

$$\int_M (\nabla \varphi \cdot \nabla \xi + h'(\Phi)\xi\varphi - \lambda\xi\varphi) = 0$$

ce qui donne pour $\xi = \Phi$

$$\int_M (-\varphi \Delta_g \Phi + h'(\Phi)\Phi\varphi - \lambda\Phi\varphi) = 0.$$

En multipliant (3) par φ on obtient

$$\int_M (\varphi \Delta_g \Phi - h(\Phi)\varphi + \lambda\Phi\varphi) = 0.$$

En ajoutant ces deux relations on a

$$\int_M [h(\Phi) - \Phi h'(\Phi)]\varphi = 0$$

ce qui est impossible. En effet φ est positive, et le terme entre crochets correspondant à la dérivée de $h(r)/r$ est lui aussi positif d'après **h2**. $\square$

On a donc $\mu > 0$ et

$$\mathbf{JR}(z) \geq \mu \int_{\mathbf{M}} z^2 \quad \forall z \in \mathbf{H}^1(\mathbf{M}). \quad (22)$$

Proposition 3.12 *Soit u une solution positive quelconque de (2) sur Ω , il existe des constantes $M_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ telles que*

$$\|u(x, t) - \Phi(t)\|_{C^2(\mathbf{M})} \leq M_1 e^{-\alpha_1 t} \quad \forall t > 0 \quad (23)$$

DÉMONSTRATION : Posons

$$u = \Phi + v.$$

D'après le Théorème 1, v tend vers 0 uniformément par rapport à t , lorsque $t \rightarrow +\infty$. On a

$$h(u) = h(\Phi) + h'(\Phi)v + O(v^2).$$

En reportant dans (2) on obtient

$$v_{tt} + \Delta_g v - h'(\Phi)v + \lambda v = O(v^2).$$

D'où, après multiplication par v ,

$$\int_{\mathbf{M}} (v.v_{tt} + v\Delta_g v - h'(\Phi)v^2 + \lambda v^2) = \int_{\mathbf{M}} O(v^3).$$

En posant $\eta(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{M}} v^2$ on a

$$\eta''(t) = \int_{\mathbf{M}} vv_{tt} + \int_{\mathbf{M}} v_t^2.$$

D'après (22)

$$\int_{\mathbf{M}} (v\Delta_g v - h'(\Phi)v^2 + \lambda v^2) \leq -\mu \int_{\mathbf{M}} v^2.$$

Donc η satisfait, pour t assez grand, une inéquation différentielle de la forme

$$0 \leq \eta'' - K\eta \quad \text{avec } K > 0.$$

D'après le principe du maximum, η décroît exponentiellement vers 0 i.e. $\eta(t) = O(\exp(-\sqrt{K}t))$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Montrons la décroissance exponentielle de v en norme C^2 . On a

$$v_{tt} + \Delta_g v = h'(\Phi)v - \lambda v + O(v^2) = \psi(x, t). \quad (24)$$

Pour t assez grand, ψ est une fonction bornée sur $\omega =]t - 1, t + 2[\times M$. On peut donc appliquer l'estimation de la Proposition B.2 avec $p = 2$ et $\omega' =]t, t + 1[\times M$,

$$\|v\|_{W^{2,2}(\omega')} \leq C\|\psi\|_{L^2(\omega)} + C'\|u\|_{L^2(\omega)}.$$

Donc $\|v\|_{W^{2,2}(\omega')}$ décroît exponentiellement lorsque $t \rightarrow +\infty$. Mais $W^{2,2}(\omega') \subset L^q(\omega')$ pour q tel que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. On peut donc, si besoin est, itérer le procédé, et montrer que $\forall q > 2 \quad \|u\|_{W^{2,q}(\omega')}$ décroît exponentiellement vers 0.

En utilisant les injections de Sobolev, on voit que $\|u - \Phi\|$ dans $C^{1,\beta}$ décroît exponentiellement vers 0 ; en utilisant le théorème de Schauder on obtient (23).

□

Une conséquence intéressante de ces estimations est

Proposition 3.13 *Pour toute fonction positive (nulle au bord dans le cas BD) $u_0 \in C(\bar{M})$, il existe une unique solution positive u de (2) continue sur $M \times [0, +\infty[$ qui vérifie $u(0, \cdot) = u_0$.*

DÉMONSTRATION : On construit cette solution comme limite des solutions u_n de (2) sur $M \times [0, 2^n]$ avec $u_n(0, x) = u_0(x)$ et $u_n(2^n, x) = 0$. D'où l'existence.

Pour l'unicité : considérons deux solutions u, v . On se place sur $[0, T]$; avec les notations de la Section 2.2 on a :

$$\int_M \int_0^T \Theta(x, t) = I_1 + I_2$$

La relation (5) permet encore le calcul de l'intégrale ci-dessus mais, cette fois, il reste la contribution en $t = T$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient de même

$$\begin{aligned} \int_M \int_0^T \left(\frac{h(u)}{u} - \frac{h(v)}{v} \right) (u^2 - v^2)^+ - \int_M \frac{(u^2 - v^2)^+}{u} u_t|_{t=T} \\ - \int_M \frac{(u^2 - v^2)^+}{v} v_t|_{t=T} \leq 0. \end{aligned}$$

Lorsque T vers $+\infty$, compte tenu des résultats précédents, les intégrales évaluées en T tendent vers 0. □

4 Solutions de signes quelconques

4.1 Homogénéisation

Lorsque $\lambda \leq \lambda_1$ on dispose d'un résultat plus général que le Théorème 1, car on n'impose pas de condition sur le signe de u :

Proposition 4.1 *Lorsque $\lambda \leq \lambda_1$, toute solution de (2) définie sur Ω tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION : On multiplie (2) par u et on intègre sur Ω_T

$$\int_M \int_0^T (uu_{tt} + u\Delta_g u + \lambda u^2 - uh(u)) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_M u\Delta_g u &= - \int_M |\nabla u|^2 \\ \int_0^T uu_{tt} &= uu_t|_0^T - \int_0^T u_t^2 \end{aligned}$$

d'où

$$- \int_M \int_0^T u_t^2 + \int_M \int_0^T (\lambda u^2 - |\nabla u|^2) - \int_M \int_0^T uh(u) + \int_M uu_t|_0^T = 0. \quad (25)$$

Puisque $\lambda \leq \lambda_1$ la deuxième intégrale est négative ou nulle, la dernière est donc positive, ce qui revient à dire que la fonction

$$w(t) = \frac{1}{2} \int_M u^2(x, t) dx$$

est convexe puisque sa dérivée $w'(t) = \int u \cdot u_t$ est croissante. Cette fonction est bornée à l'infini d'après l'estimation (17) et les estimations de Schauder, sa dérivée tend vers 0 à l'infini ; en reportant dans (25) on voit que chacune des intégrales tend vers 0, puisqu'elles sont de même signe.

Dans les cas **BV**, **BN** on peut étendre le résultat ci-dessus lorsque $\lambda \leq \lambda_2$ deuxième valeur propre du Laplacien sur M , qui est définie classiquement,[4], par

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} \mid u \in W^{1,2}(M) \setminus \{0\} \quad \text{tq} \quad \int_M u = 0 \right\}.$$

On peut aussi affaiblir les hypothèses sur la non-linéarité h en remplaçant **h2** et **h4** par : **h2'** h est une fonction strictement croissante de r .

Un point important pour caractériser le comportement asymptotique des solutions de (2) est la conservation de l'énergie (c.f. Proposition 1.1) :

$$J(u)(t) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \left(- \int_M u_t^2 + \int_M \nabla u^2 + 2 \int_M F(u) \right)$$

Les solutions homogènes (indépendantes de x), $\varphi(t)$, de (2) vérifient donc

$$\varphi'' + \lambda\varphi - h(\varphi) = 0 \quad (26)$$

Ces solutions sont entièrement classifiées par leur énergie σ avec $0 \leq \sigma \leq J(\mu_f)$.

Pour $0 \leq \sigma < J(\mu_f)$, soit γ_σ l'orbite de (26) d'énergie σ et T_σ sa période.

Pour $\sigma = J(\mu_f)$, γ_σ désigne la courbe fermée réunion de $\{\mu_f\}$, $\{-\mu_f\}$ et des deux orbites connectant respectivement μ_f à $-\mu_f$ et $-\mu_f$ à μ_f . c.f. figure.

Théorème 4 *Supposons $\lambda \leq \lambda_2$; soit u une solution de (2) définie sur $[0, +\infty[\times M$, et $\bar{u}(t)$ la moyenne de $u(x, t)$ sur M .*

(i) *On a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} = 0$$

De plus $0 \leq J(u)(t) \leq J(\mu_f)$.

(ii) *Soit $\sigma = J(u)$. On a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(u(t, \cdot), \gamma_\sigma) = 0$$

(iii) *Pour $\lambda < \lambda_2$, et pour $\sigma < J(\mu_f)$, soit φ une solution de (26) d'énergie σ . Il existe un déphasage τ tel que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - \varphi(t + \tau)\|_{C^2(M)} = 0$$

DÉMONSTRATION :

Lemme 4.2 *Si $\lambda < \lambda_2$, alors $\|u - \bar{u}\|_{C^2(M)}$ décroît exponentiellement vers 0, lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION : On a $\bar{u} = \frac{1}{\text{vol}(\text{M})} \int_{\text{M}} u(x, t) d\mu$. La fonction u vérifie

$$u_{tt} + \Delta_g u + \lambda u = h(u).$$

En prenant la moyenne sur M, on obtient

$$\bar{u}_{tt} + \lambda \bar{u} = \overline{h(u)}.$$

Par différence :

$$(u - \bar{u})_{tt} + \Delta_g(u - \bar{u}) + \lambda(u - \bar{u}) = h(u) - \overline{h(u)}. \quad (27)$$

En multipliant par $(u - \bar{u})$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\text{M}} (u - \bar{u})_{tt}(u - \bar{u}) - \int_{\text{M}} |\nabla(u - \bar{u})|^2 + \lambda \int_{\text{M}} (u - \bar{u})^2 &= \\ \int_{\text{M}} (h(u) - \overline{h(u)})(u - \bar{u}). \end{aligned} \quad (28)$$

Le deuxième membre de cette relation

$$\int_{\text{M}} (h(u) - \overline{h(u)})(u - \bar{u}) = \int_{\text{M}} h(u)(u - \bar{u}) \quad (29)$$

$$= \int_{\text{M}} (h(u) - h(\bar{u}))(u - \bar{u}) \quad (30)$$

est positif, puisque h croît. En posant

$$\varrho(t) = \frac{1}{2} \int_{\text{M}} (u - \bar{u})^2$$

le premier membre de (28) s'écrit

$$\varrho''(t) - \int_{\text{M}} (u_t - \bar{u}_t)^2(t) - \int_{\text{M}} |\nabla(u - \bar{u})|^2(t) + 2\lambda\varrho(t).$$

Par définition de λ_2

$$\int_{\text{M}} |\nabla(u - \bar{u})|^2 \geq \lambda_2 \int_{\text{M}} (u - \bar{u})^2.$$

La relation (28) entraîne

$$\varrho''(t) - 2(\lambda_2 - \lambda)\varrho(t) \geq 0. \quad (31)$$

Pour $\lambda < \lambda_2$, d'après le principe du maximum, $\varrho(t)$ décroît exponentiellement vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

D'après (27) on a, en posant $\delta = u - \bar{u}$

$$\delta_{tt} + \Delta_g \delta = -\lambda \delta + h(u) - \overline{h(u)} = \Psi(x, t).$$

D'après B.2 on a alors, avec $\omega' = M \times]t, t + 1[$ et $\omega = M \times]t - 1, t + 2[$

$$\|\delta\|_{W^{2,2}(\omega')} \leq C \|\Psi\|_{L^2(\omega)} + C' \|\delta\|_{L^2(\omega)}.$$

Selon la même argumentation qu'au paragraphe 3.4, $\|u\|_{W^{2,q}(\omega')}$ décroît vers 0, $\forall q > 2$ et $\|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} \rightarrow 0$. $\square$

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du Théorème 4, pour $\lambda = \lambda_2$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} = 0$$

DÉMONSTRATION : Pour $\lambda = \lambda_2$, ϱ est une fonction positive, convexe, bornée à l'infini : elle converge vers une limite ℓ . Si ℓ est non nulle,

$$\int_M h(u)(u - \bar{u}) = \int_M \frac{h(u) - h(\bar{u})}{u - \bar{u}} (u - \bar{u})^2$$

ne tend pas vers 0, puisque h est strictement monotone. En reportant dans (28), on a $\varrho'' \geq \varepsilon > 0$, ce qui contredit la bornitude de ϱ . On montre ensuite facilement, comme ci-dessus, que $\|u - \bar{u}\|_{C^2(M)}$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. $\square$

La démonstration de (i) découle immédiatement des deux lemmes ci-dessus.

Pour (ii): soit t_n une suite de réels tendant vers l'infini. On pose $u_n(t, \cdot) = u(t + t_n, \cdot)$ pour $t \geq -t_n$. La suite (u_n) est bornée dans $C^{2+\gamma}([-T, T] \times M)$ pour tout $T \in [0, t_n]$, d'après les estimations de Schauder. En utilisant le Théorème d'Ascoli, modulo l'extraction d'une suite diagonale, il existe une suite u_{n_k} et une fonction $v \in C^{2+\gamma}(\mathbb{R} \times M)$ telle que $u_n(t, x) \rightarrow v(t, x)$ pour la topologie $C_{loc}^{2+\gamma}$. En outre v vérifie

$$v_{tt} + \Delta_g v + \lambda v - h(v) = 0$$

sur $\mathbb{R} \times M$. Comme $u_n(t, \cdot) - \bar{u}_n(t)$ tend vers 0 et que $u_{t_{n_k}}$ tend vers $\bar{v}$, on en déduit que v est homogène ; v est donc une solution globale de (26).
On a, d'une part :

$$J(v) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M (-u_t^2 + 2F(u) + |\nabla u|^2)$$

et d'autre part

$$\bar{u}_{tt}(t) + \lambda \bar{u}(t) - h(\bar{u}) = \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 ; en outre

$$|\varepsilon(t)| \leq C' e^{(\lambda - \lambda_2)t}$$

si $\lambda < \lambda_2$ On a donc démontré (ii).

Figure 1: Plan de Phase de (26)

Pour (iii) : si v est T -périodique, donc d'énergie $J(v) < J(\mu_f)$, avec $\lambda < \lambda_2$, l'étude locale de la courbe (v, v_t) dans le plan de phase implique qu'il

existe un déphasage τ tel que

$$\|\bar{u}(t) - v(t + \tau)\|_{C^2(M)} \rightarrow 0$$

ce qui démontre (iii). $\square$

En utilisant l'argument de stricte convexité du (i) du Théorème précédent, on montre

Corollaire 4.4 *Les solutions globales, i.e. définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, de (2) sont homogènes (indépendantes de x) et solutions de (26).*

REMARQUE : On trouve dans [9] un résultat similaire d'homogénéisation pour les solutions positives, sur $\mathbb{R}^N$, renormalisées de

$$-\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}}$$

4.2 Unicité

Si on abandonne l'hypothèse u positive, il n'y a plus unicité de la solution pour $u(0)$ donné. Néanmoins on démontre un résultat de dépendance continue en fonction de $u(0)$ et $u_t(0)$ pour les solutions définies sur $\mathbb{R}^+$.

La méthode utilisée est largement inspirée de [8] : à l'aide de l'opérateur $\Delta_g^{1/2}$ on ramène le problème à un système de deux équations paraboliques [20] afin d'utiliser l'argument de type convexité suivant [2, p 139-140] :

Proposition 4.5 *Soit B un opérateur linéaire auto-adjoint sur $L^2(M)$, $v(t)$ une fonction définie pour $t \in [a, b]$ à valeurs dans $L^2(M)$, dérivable au sens fort et telle que $\forall t \in [a, b] \quad v(t) \in D(B)$. On a*

$$\max_{a \leq t \leq b} \|v(t)\|^2 \leq 2(\|v(a)\|^2 + \|v(b)\|^2) + 4\left(\int_a^b \left\|\frac{dv}{dt} - Bv\right\| dt\right)^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2 .

DÉMONSTRATION : Soit p le projecteur associé à la partie positive du spectre de B , $v_1 = pv$, $v_2 = v - v_1$ et $f = \frac{dv}{dt} - Bv$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_1\|^2 &= 2 \int_M v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ &= 2 \int_M v_1 Bv_1 + 2 \int_M pf v_1 \\ &\geq 2 \int_M pf v_1 . \end{aligned} \tag{32}$$

De même

$$\frac{d}{dt}\|v_2\|^2 \leq 2 \int_M (I - p)f v_2 . \quad (33)$$

En intégrant par rapport à t , avec $V = \max_{a \leq t \leq b} \|v(t)\|$

$$\|v_1(b)\|^2 - \|v_1(t)\|^2 \geq 2 \int_t^b \int_M pf(s)v_1(s)ds \quad (34)$$

$$\|v_1(t)\|^2 \leq \|v_1(b)\|^2 + 2V \int_t^b \|f(s)\|ds \quad (35)$$

$$\|v_2(t)\|^2 \leq \|v_1(a)\|^2 + 2V \int_a^t \|f(s)\|ds. \quad (36)$$

En ajoutant les deux dernières relations :

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(a)\|^2 + \|v(b)\|^2 + 2V \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Le terme de gauche est majoré par V^2 et le terme $2V \int_a^b \|f(s)\|ds$ par $\frac{1}{2}V^2 + 2(\int_a^b \|f(t)\|dt)^2$ d'où la formule annoncée. $\square$

Remarquons que ce résultat est quasiment indépendant de B , et ne fait intervenir que le second membre de l'équation. Dans [2] on concluait à l'aide de :

Proposition 4.6 *Soit u une fonction vérifiant*

$$\left\| \frac{du}{dt} - Bu \right\| \leq \alpha(t)u$$

sur un intervalle $a \leq t \leq b$ tel que $\int_a^b \alpha(\tau)d\tau \leq 1/(2\sqrt{2})$. On a

$$\|u(t)\| \leq 2\sqrt{2}\|u(a)\|^{\frac{b-t}{b-a}}\|u(b)\|^{\frac{t-a}{b-a}}$$

Nous allons suivre une démarche analogue pour montrer :

Théorème 5 *Soient u et v deux solutions du problème (2), satisfaisant les conditions au bord, $u, v \in C^0(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(M))$, définies pour tout t positif, avec $u(0)$ et $v(0)$ dans $C(M)$, $u_t(0)$ et $v_t(0)$ dans $L^2(M)$. On suppose que $u(0, \cdot) = v(0, \cdot)$ et que $u_t(0, \cdot) = v_t(0, \cdot)$, alors u et v sont égales.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes ; posons $w = u - v$ et $F(w) = f(u) - f(v) - w$. La fonction w vérifie

$$w_{tt} + (\Delta_g - I)w = F(w) \quad (37)$$

Comme w est nulle au bord $t = 0$ on peut la prolonger par réflexion ; la théorie de la régularité des équations elliptiques montre que w est régulière pour tout t .

Lemme 4.7 *Il existe une constante K ne dépendant que de $u(0)$ et de f telle que*

$$\|F(w)\| \leq K\|w\|. \quad (38)$$

DÉMONSTRATION : Par hypothèse $u(0)$ est continue, donc u est continue sur Ω . Compte tenu de l'estimation d'Ossermann, le maximum de u est atteint soit pour $t = 0$, soit en un point intérieur et donc $\sup_{x,t \in \Omega} |u(x,t)| \leq \max(\|u(0)\|_\infty, D)$ où D est définie par (17). En écrivant $f(u) - f(v) = f'(\xi)w$ on obtient la conclusion désirée. $\square$

Soit B l'opérateur $(-\Delta_g + I)^{1/2}$ qui peut être défini de diverses manières [20], en particulier par analyse spectrale [19]. Si 0 n'est pas valeur propre de Δ_g on peut prendre directement $B = \Delta_g^{1/2}$. Posons

$$\begin{cases} w_t - Bw &= p \\ w_t + Bw &= q \end{cases} \quad (39)$$

et

$$r(t) = \|p(t)\|^2 + \|q(t)\|^2. \quad (40)$$

Pour contrôler w et w_t il suffit de contrôler r .

En effet

Lemme 4.8

$$\|w(t)\|^2 \leq \frac{r(t)}{1 + \lambda_1}$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre de $-\Delta_g$ sur M avec les conditions aux bord correspondantes.

DÉMONSTRATION : On a d'après (39) :

$$\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|w_t\|^2 + \|Bw\|^2$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|Bw\|^2 &= \int_M Bw \, Bw \\ &= \int_M w \, B^2 w \\ &= \int_M w \, (-\Delta_g + I)w \\ &= \int_M w^2 + \int_M \nabla w^2 \\ &\geq (1 + \lambda_1) \|w\|^2. \end{aligned} \tag{41}$$

La conclusion est immédiate. $\square$

Nous allons appliquer à p et q la Proposition 4.6 et en déduire que $w \equiv 0$. On a $w \in D(B^2)$ et donc $w_t \in D(B)$ puisque B est un opérateur fermé. Les fonctions p et q vérifient

$$\begin{cases} p_t + Bp &= F(w) \\ q_t - Bq &= F(w). \end{cases}$$

Lemme 4.9 *Il existe un réel $\tau > 0$ dépendant de K tel que pour $|b - a| \leq \tau$, on a :*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [a, b] \quad e^{2\sigma t} r(t) \leq 4e^{2\sigma a} r(a) + 4e^{2\sigma b} r(b). \tag{42}$$

DÉMONSTRATION : Posons $p^\sigma(t) = e^{\sigma t} p(t)$ et $q^\sigma(t) = e^{\sigma t} q(t)$. On a alors

$$\begin{cases} p_t^\sigma + (B + \sigma I)p^\sigma &= e^{\sigma t} F(w) \\ q_t^\sigma - (B - \sigma I)q^\sigma &= e^{\sigma t} F(w). \end{cases}$$

Appliquons la Propriété 4.5 à p^σ et q^σ ,

$$\max_{a \leq t \leq b} |p^\sigma(t)|^2 \leq 2|p^\sigma(a)|^2 + 2|p^\sigma(b)|^2 + 4\left(\int_a^b e^{\sigma t} |F(w)| dt\right)^2 \tag{43}$$

$$\max_{a \leq t \leq b} |q^\sigma(t)|^2 \leq 2|q^\sigma(a)|^2 + 2|q^\sigma(b)|^2 + 4\left(\int_a^b e^{\sigma t} |F(w)| dt\right)^2. \tag{44}$$

En ajoutant ces deux relations

$$\max_{a \leq t \leq b} e^{2\sigma t} r(t) \leq 2e^{2\sigma a} r(a) + 2e^{2\sigma b} r(b) + 8 \left(\int_a^b e^{\sigma t} |F(w)| dt \right)^2.$$

D'après les Lemmes 4.7 et 4.8 on a

$$\|F(w)\| \leq K\|w\| \leq \frac{K}{\sqrt{1+\lambda_1}} r^{1/2}(t).$$

D'où on déduit :

$$8 \left(\int_a^b e^{\sigma t} |F(w)| dt \right)^2 \leq 8 \frac{K^2}{1+\lambda_1} (b-a)^2 \max_{a \leq t \leq b} e^{2\sigma t} r(t).$$

En choisissant τ de façon que

$$8K^2\tau^2 \leq \frac{1}{2}(1+\lambda_1) \quad (45)$$

on a bien (42). $\square$

Cette propriété est fondamentale : elle permet d'abord de démontrer le Théorème 5, mais aussi la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME : Prenons $a = 0$; par hypothèse $r(a) = 0$ puisque w et w_t sont nulles. Choisissons b vérifiant $b-a \leq \tau$; faisant tendre σ vers $-\infty$ on voit que r est nulle sur $[0, b/2]$. Le Lemme 4.8 montre que w est nulle sur $[0, b/2]$. En itérant le raisonnement on obtient $w \equiv 0$. $\square$

4.3 Systèmes dynamiques

Soit H un espace métrique muni d'une famille d'opérateurs $S(t) : H \rightarrow H$ définis pour $t \geq 0$ et satisfaisant

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s) \quad \forall s, t \geq 0 \quad (46)$$

$$S(0) = Id. \quad (47)$$

Définition 1 *Un attracteur est une partie $\mathcal{A}$ de H qui vérifie*

1. $\mathcal{A}$ est invariant par $S(t)$.
2. $\exists \mathcal{U}$ voisinage ouvert de $\mathcal{A}$ tel que $\forall u \in \mathcal{U}$, $S(t)u$ converge vers $\mathcal{A}$ lorsque t tend vers l'infini, i.e. $\text{dist}(S(t)u, \mathcal{A}) \rightarrow 0$. (la distance étant prise au sens ensembliste : $\inf_{y \in \mathcal{A}} d(S(t)u, y)$).

Définition 2 Soit $\mathcal{B}$ une partie de H et $\mathcal{U}$ un ouvert contenant $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est absorbant dans $\mathcal{U}$ si l'orbite de n'importe quel borné de $\mathcal{U}$ rentre dans $\mathcal{B}$ au bout d'un certain temps :

$$\forall \mathcal{B}_0 \in \mathcal{U}, \mathcal{B}_0 \text{ borné } \exists t_1 \forall t \geq t_1 S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}.$$

Rappelons le résultat suivant [19]

Proposition 4.10 Supposons que $S(t)$ est un opérateur continu de H dans lui-même pour tout t positif ; de plus il existe un $t_1 > 0$ tel que $S(t_1)$ est compact. On suppose enfin qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ et un borné $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}$ est absorbant dans $\mathcal{U}$.

L'ensemble ω -limite de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ est un attracteur compact qui attire les bornés de $\mathcal{U}$. C'est l'attracteur maximal dans $\mathcal{U}$. De plus si H est un espace de Banach et $\mathcal{U}$ convexe et connexe, alors $\mathcal{A}$ est aussi connexe.

DÉMONSTRATION : il existe un instant t' tel que $\bigcup_{t \geq t'} S(t)\mathcal{B}$ soit relativement compact. En effet, soit t_0 tel que pour $t \geq t_0$ on ait $S(t)\mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Alors pour $t \geq t' = t_0 + t_1$, $S(t)\mathcal{B} = S(t_1)S(t - t_1)\mathcal{B}$ est inclus dans $S(t_1)\mathcal{B}$ car $S(t - t_1)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ et donc

$$\bigcup_{t \geq t'} S(t)\mathcal{B} \subset S(t_1)\mathcal{B}.$$

On sait que $\omega(\mathcal{B})$ est non vide, compact et invariant. Montrons par l'absurde que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ attire les bornés de $\mathcal{B}$: supposons qu'il existe $\mathcal{B}'$ borné avec $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}', \mathcal{A})$ ne tendant pas vers 0. Il existe donc un réel $\delta > 0$ et une suite t_n tendant vers l'infini telle que $\text{dist}(S(t_n)\mathcal{B}', \mathcal{A}) \geq \delta > 0$ pour tout n . Donc

$$\forall n \exists b_n \in \mathcal{B}' \text{ dist}(S(t_n)b_n, \mathcal{A}) \geq \delta/2 > 0.$$

Or $\mathcal{B}$ est absorbant, donc pour n assez grand, $S(t)\mathcal{B}'$ et $S(t)b_n$ appartiennent à $\mathcal{B}$; la suite $S(t_n)b_n$ est donc relativement compacte et possède au moins un point d'accumulation β avec

$$\beta = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)b_{n_i}$$

mais $S(t_n)b_n$ appartient à $\mathcal{B}$ donc $\beta \in \mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$: il y a contradiction. $\square$

Pour la connexité on utilise :

Lemme 4.11 *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe et connexe et si $K \subset \mathcal{U}$ est un compact invariant qui attire les compacts, alors K est connexe.*

DÉMONSTRATION : La fermeture de l'enveloppe convexe de K , $\mathcal{B}$ est compacte, connexe et incluse dans $\mathcal{U}$; donc K attire $\mathcal{B}$. Si K n'était pas connexe, on pourrait trouver deux ouverts C et D tels que

$$C \cap K \neq \emptyset \quad D \cap K \neq \emptyset \quad K \subset C \cup D \quad C \cap D = \emptyset.$$

Puisque $K \subset \mathcal{B}$, $K = S(t)K \subset S(t)\mathcal{B}$, mais $\mathcal{B}$ est connexe et S continue donc $S(t)\mathcal{B}$ est aussi connexe. Donc $C \cap S(t)\mathcal{B}$ et $D \cap S(t)\mathcal{B}$ sont non vides et $C \cup D$ ne recouvre pas $S(t)\mathcal{B}$. Pour tout t , il existe $x_t \in S(t)\mathcal{B}$ avec $x_t \notin C \cup D$. Considérons la suite des x_n qui est relativement compacte par hypothèse : K attire $\{x_n\}$ et on peut extraire une sous-suite, notée encore (x_n) qui converge vers un point $x \in K$; nécessairement $x \notin C \cup D$ d'où la contradiction. $\square$

4.4 Dépendance continue et attracteur

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur M qui appartiennent à $H^1(M)$ et satisfont les conditions aux bords. On désigne par X l'ensemble des couples $(u_0, u_1) \in E \times L^2(M)$ tels qu'il existe une solution U de (2) définie pour tout t positif avec $U(0, \cdot) = u_0$ et $U_t(0, \cdot) = u_1$. Soit $t \mapsto S(t)$ défini par

$$S(t) : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ (u_0, u_1) & \longmapsto & (U(t, \cdot), U_t(t, \cdot)) \end{array}$$

Le Théorème 5 montre que cette application est bien définie ; il est clair qu'elle est à valeurs dans X , et qu'elle vérifie $S(t_1) \circ S(t_2) = S(t_1 + t_2)$.

Montrons que S est continue. Soient $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$ deux éléments de X . On peut appliquer à $w = u_0 - v_0$ le raisonnement du paragraphe 4.2 et $r(t) = \|w_t\|^2 + \|Bw\|^2$ vérifie donc (42) pour $|b - a| < \tau$ pour un réel τ fixé dépendant de $u(0)$.

Lemme 4.12 *Soit $t \mapsto \rho(t)$ une fonction numérique strictement positive vérifiant*

$$\left(e^{\sigma t} \rho(t)\right)^2 \leq 4 \left(e^{\sigma a} \rho(a)\right)^2 + 4 \left(e^{\sigma b} \rho(b)\right)^2 \quad \forall t \in [a, b]$$

pour tout σ . On a alors

$$\rho(t) \leq 2\sqrt{2}\rho(a)^{\frac{b-t}{b-a}}\rho(b)^{\frac{t-a}{b-a}}. \quad (48)$$

DÉMONSTRATION : Choisissons σ de façon que les deux termes du second membre soient égaux, i.e. $\sigma = (\ln |\rho(b)| - \ln |\rho(a)|)/(b - a)$. En reportant dans la relation on obtient

$$\rho(t)^2 \frac{\rho(b)^{\frac{2t}{b-a}}}{\rho(a)^{\frac{2t}{b-a}}} \leq 8\rho(a)^2 \frac{\rho(b)^{\frac{2a}{b-a}}}{\rho(a)^{\frac{2a}{b-a}}}$$

ce qui conduit après simplification à la relation annoncée. $\square$

Lemme 4.13 *Il existe un réel C' dépendant entre autres de τ (cf Lemme 4.9), tel que*

$$\forall t > \tau \quad |r(t)| \leq C'.$$

DÉMONSTRATION : Pour $t > \tau$ on dispose d'une majoration uniforme de w grâce à (2.8) et la théorie de la régularité des équations elliptiques permet de conclure.

Proposition 4.14 *Il existe un réel C , dépendant de t et de $r(0)$ entre autres, tel que*

$$\forall t > 0 \quad r(t) \leq C(t) \max(r(0), r(0)^{1/2})$$

DÉMONSTRATION : D'après le Lemme (4.9), $\rho = r^{1/2}$ vérifie (48). Nous allons appliquer de façon réitérée (48) (avec des pas de temps assez petits) pour amener la borne a en 0.

Pour $0 \leq t \leq \tau/2$: on applique directement la relation (48) avec $a = 0$, $b = \tau$ et $C(t) = 2\sqrt{2} \max(C', 1)$, où C' est définie par le Lemme 4.13 puisque

$$\rho(0)^{\frac{b-\tau}{\tau}} \leq \max(r(0), r(0)^{1/2}).$$

Pour $t > \tau/2$, en posant $y(t) = \ln(\rho(t))$ et $K = \ln(2\sqrt{2})$ avec $0 < h < \tau/2$, $a = t - h$, $b = t + h$, la relation (48) s'écrit

$$y(t) \leq K + \frac{1}{2}y(t-h) + \frac{1}{2}y(t+h) \quad (49)$$

En réitérant le procédé on obtient

$$y(t-h) \leq K + \frac{1}{2}y(t-2h) + \frac{1}{2}y(t) \quad (50)$$

$$y(t+h) \leq K + \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}y(t+2h). \quad (51)$$

En ajoutant ces trois relations, compte tenu de la première, on obtient

$$y(t) \leq 4K + \frac{1}{2}y(t-2h) + \frac{1}{2}y(t+2h).$$

Toujours selon la même technique, on arrive à

$$y(t) \leq nK + \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}y(2t).$$

La conclusion est alors immédiate, car $\rho(2t)$ est majorée indépendamment de t .

Théorème 6 *Le système dynamique construit sur X vérifie les hypothèses de la Proposition 4.10. Il possède donc un attracteur universel.*

DÉMONSTRATION : Pour $t > 0$, $S(t)$ est compacte, d'après la théorie de la régularité des solutions d'équations elliptiques. Les autres hypothèses de la Proposition 4.10 ont été vérifiées dans les lemmes précédents. $\square$

Essayons de caractériser $\mathcal{A}$. Naturellement $\mathcal{A}$ contient

- Les solutions stationnaires $u(x, t) = \pm\Phi(x)$ et celles qui peuvent être construites par réflexion à partir de solutions analogues.
- Les solutions qui connectent les solutions stationnaires ci-dessus.
- Dans le cas **BN** et **B** les solutions "radiales" qui ne dépendent pas de x , i.e. les solutions de l'équation différentielle $y_{tt} = f(y)$ qui sont définies pour tout t .
- Dans le cas **BD** les solutions obtenues en prolongeant par réflexion autour de $t=0$ et de $t=T$ (jusqu'à l'infini) les solutions du problème de Dirichlet sur Ω_T .

On pourrait espérer que ces solutions suffisent à décrire $\mathcal{A}$, mais hélas il n'en est rien. Dans le cas où il existe un groupe continu à un paramètre d'isométries $t \mapsto H(t)$ agissant sur M , il peut exister d'autres solutions "solitons" de la forme $u(x, t) = v(H(t)x)$ où $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ est solution d'une équation $Lv = f(v)$ avec L opérateur elliptique du second ordre.

Par exemple, pour $M = S^1$ et $h(r) = r^3$, il existe des solutions de

$$u_{tt} + u_{xx} + \lambda(u) - u^3 = 0$$

de la forme $u(x, t) = Av(x + \alpha t)$ avec α réel fixé, si et seulement si v vérifie l'équation différentielle

$$(1 + \alpha^2)v'' + \lambda Av - A^3v^3 = 0$$

qui se ramène à

$$v'' + \mu v - v^3 = 0 \tag{52}$$

en posant $A = (1 + \alpha^2)^{1/3}$ et $\mu = \lambda(1 + \alpha^2)^{-2/3}$. Si $\lambda_1 < \lambda$, on peut toujours prendre α assez grand pour avoir $\lambda_1 < \mu$, ce qui assure l'existence de solutions non nulles de (52).

A Principe de comparaison

Les résultats suivants sont présentés dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$; ils s'étendent sans difficulté à une variété Riemannienne compacte au moyen de cartes locales.

L'argument fondamental est le principe de comparaison suivant [13, theorem 10.1]. Considérons l'opérateur sous forme divergente

$$Q(u) = \Sigma a^{i,j}(x, u, \nabla u) D_{i,j}(u) + b(x, u, \nabla u)$$

où $a^{i,j}$ et b sont des fonctions de $x, u, \nabla u$. Soient u et $v \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ définies sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$Q(u) \geq Q(v) \text{ dans } D \quad \text{et} \quad u \leq v \text{ sur } \partial D$$

avec

- Q est elliptique relativement à u ou v
- les coefficients $a^{i,j}$ de Q sont indépendants de u
- le coefficient $b(x,u,Du)$ est *non-croissant* par rapport à u pour chaque (x, Du)
- les coefficients $a^{i,j}$ sont continûment dérivables par rapport à Du .

Alors on a $u \leq v$ dans D . De plus si $Q(u) > Q(v)$ dans D et $u \leq v$ sur D l'inégalité stricte $u < v$ est satisfaite dans D .

Il est facile d'obtenir un résultat similaire dans le cas des conditions de Neumann, ou de conditions mélangées, lorsque l'opérateur est de la forme $Q(u) = u_{tt} + \Delta(u) + b(u)$ où b est non-croissante par rapport à u . On a alors de façon classique le résultat suivant :

Proposition A.1 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, u et v des fonctions régulières sur D , continues sur $\bar{D}$ qui vérifient $Q(v) \geq Q(u)$ sur D . On suppose que ∂D est C^1 par morceaux, $\partial D = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ (I fini), et que sur chaque Γ_i u et v vérifient soit les conditions de Neumann, soit la condition $u \leq v$, alors on a $u \leq v$ dans D .*

B Régularité des solutions d'équations elliptiques

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et L l'opérateur défini par

$$\sum_{i,j} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u.$$

On suppose que L est strictement elliptique, i.e.

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j} a^{ij} x_i x_j > \lambda \|x\|^2.$$

Proposition B.1 (Schauder) *On suppose que $f, a_{ij}, c \in C^{k,\alpha}(\Omega)$; soit $u \in C^2(\Omega)$ une solution de $Lu = f$. On a alors*

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega).$$

Proposition B.2 (Agmon Douglis Nirenberg) Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de $Lu = f$ dans Ω . On suppose que les coefficients $a^{i,j}$ sont uniformément lipschitziens dans Ω , c est borné et $f \in L^2(\Omega)$. Pour tout domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$, u appartient à $W^{2,2}(\Omega')$ avec

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

où C dépend de n , du module d'ellipticité λ , des bornes des coefficients, du module de continuité des $a^{i,j}$ et de $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Par un raisonnement similaire, on peut montrer

Corollaire B.3 Si $f \in W^{k,2}(\Omega)$, les coefficients $a^{i,j} \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$, $c \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$ ($k \geq 1$) alors $u \in W^{k,2}(\Omega')$ avec une majoration analogue,

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)})$$

où C dépend en plus de k .

Proposition B.4 On suppose que a^{ij}, c sont dans $C^0(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$. Soit $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ une solution de $Lu = f$ dans Ω ; alors pour tout domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$ on a

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{W^p(\Omega)} + \|f\|_{W^p(\Omega)})$$

pour $1 < p < \infty$.

On désigne par $W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui appartiennent à $W^{2,p}(\Omega')$ pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$. On dispose du résultat suivant

Proposition B.5 Soit $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ une solution de l'équation $Lu = f$ dans un domaine Ω , où les coefficients de L sont dans $C^{k-1,1}(\Omega)$, $f \in W_{loc}^{k,q}(\Omega)$, avec $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$. Alors $u \in W_{loc}^{k+2,q}(\Omega)$.

Proposition B.6 Soit L un opérateur satisfaisant les conditions habituelles d'ellipticité et de bornitude des coefficients, avec $f \in L^q(\Omega)$ pour $q > n$. Si u est une solution dans $W^{1,2}(\Omega)$ de $Lu = f$ et si Ω satisfait une condition de cône extérieur en $x_0 \in \partial\Omega$, on a pour tout $0 \leq R \leq R_0$

$$\text{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq C(R^\alpha (R_0^{-\alpha} \sup_{\Omega \cap B_0} |u| + k) + \sigma \sqrt{RR_0})$$

où $\sigma(R) = \text{osc}_{\partial\Omega \cap B_R} u$.

Corollaire : Si Ω satisfait une condition de cône extérieur en chaque point de $\partial\Omega$ et si $\sigma(R) \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow 0$, alors u est uniformément continue sur $\bar{\Omega}$.

Rappelons enfin les résultats classiques d'injections de Sobolev

Proposition B.7 (Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un $C^{0,1}$ domaine de $\mathbb{R}^n$. Pour $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m + 1$ l'injection de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$ est compacte $\forall \beta < k - \frac{n}{p} - m$.*

En conclusion : Pour tout ouvert fini $\Omega \subset M \times]0, +\infty[$, si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est une solution de (2) alors $h(u)$ appartient à $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout q compte tenu de l'estimation uniforme (2.8) et donc à $W_{loc}^{3,q}(\Omega)$. D'après (B.7) $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$.

Références

- [1] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences **75** (1988)
- [2] Agmon S., Nirenberg L. Properties of Solutions of Ordinary Differential Equations in Banach Space *Communications on Pure and Applied Mathematics* **XVI** (1963) 121-239.
- [3] Benguria R., Brézis H., Lieb E.H. The Thomas-Fermi-Von Weizsacker theory of atoms and molecules, *Comm. Math. Phys.* **79** (1980) 167-180.
- [4] Berger M., Gauduchon P., Mazet E. *Le spectre d'une variété riemannienne* Springer-Verlag, Lecture notes in Math. 194 (1971).
- [5] Bidaut-Véron M.F., Véron L. Nonlinear elliptic equation on compact Riemannian Manifolds and asymptotics of Emden equations, *Invent. Math.* **106** (1991) 489-539.
- [6] Bouhar M., Veron L. Integral Representation of Solutions of Semilinear Elliptic Systems in Cylinders and Applications, *Nonlinear Analysis* **23** (1994) 275-296.

- [7] Brezis H., Nirenberg L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents, *Comm. Pure Applied Math.* **XXXVI** (1983) 437-477.
- [8] Calsina A., Mora X., Solà-Morales J. The Dynamical Approach to Elliptic Problems in Cylindrical Domains and a Study of their Parabolic Singular Limit, *Jl of Differential Equations* **102** (1993) 244-304 .
- [9] Caffarelli L.A., Gidas B., Spruck J. Behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Applied Math.* **XLII** (1989) 271-297.
- [10] Chen X.Y., Matano H., Véron L. Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$, *Jl. Functional Anal.* **83** (1989) 50-97.
- [11] Fabbri J., à paraître.
- [12] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J. *Riemannian Geometry* Springer-Verlag, Universitext (1987)
- [13] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1983).
- [14] Gmira , Véron L. Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation, *Duke Math. Jl* **64** (1991) 271-324.
- [15] Guerch B., Véron L. Local Properties of Stationary Solutions of some Nonlinear singular Schrödinger Equations *Revista Matemática Iberoamericana* **7** (1991) 65-114
- [16] Kato T. Schrödinger operators with singular potentials, *Israël Jl. Math.* **13** (1973) 135-148.
- [17] Matano H. Existence of nontrivial unstable sets for equilibriums of strongly order-preserving systems, *Jl. Fac. Sci. Tokyo* **30** (1983) 645-673.
- [18] Ossermann R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$, *Pacific Jl. Math.* **7** (1957) 1641-1647.

- [19] Temam R. *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag Applied Mathematical Sciences 68.
- [20] Véron L. Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans L^1 , *Rev. Roum. Math. Pura Appl.* **27** (1982) 95-123.
- [21] Véron L. Singular solutions of some nonlinear elliptic equations, *Non-linear Anal.* **5** (1981) 225-242
- [22] Véron L. Comportement asymptotique des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires dans $\mathbb{R}^N$, *Ann. Mat. Pura Appl.* **127** (1981) 25-50.

Comportement asymptotique des solutions d'un système elliptique conservatif non linéaire

Jean-René LICOIS¹

5 Juillet 1994

Abstract

Dans un article précédent on a montré que toute solution positive de $u_{tt} + \Delta_g u = f(u)$ sur $M \times \mathbb{R}^+$ avec $u \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$) sur ∂M tend vers la solution positive Φ du problème stationnaire associé $\Delta_g u = f(u)$ avec décroissance exponentielle de $\|u - \Phi\|_\infty$, où f est de la forme $f(r) = r^p - \lambda r$ et M une variété Riemannienne compacte. On étend ce résultat à un système de la forme

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_g u + \alpha u - G_x(u, v) &= 0 \\ v_{tt} + \Delta_g v + \beta v - G_y(u, v) &= 0 \end{cases}$$

où G satisfait certaines conditions de croissance et de convexité.

1 Introduction

1.1 Hypothèses et notations

Dans un article précédent [4] on démontre que toute solution positive de $u_{tt} + \Delta_g u = f(u)$ sur $M \times \mathbb{R}^+$ avec $u \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$) sur ∂M tend vers la solution positive Φ du problème stationnaire associé $\Delta_g u = f(u)$ avec

¹Université de Tours — Faculté des Sciences et Techniques. Parc de Grandmont. 37200 Tours FRANCE

décroissance exponentielle de $\|u - \Phi\|_\infty$. La non-linéarité est de la forme $f(r) = h(r) - \lambda r$ où

h est une fonction numérique de classe C^1

$h(r)/r$ est croissante et tend vers 0 en 0

il existe des réels $A, B > 0$ et un réel $p > 1$ tels que $f(r) > Ar^p - B$.

Il nous a paru intéressant de savoir si les techniques mises en œuvres pouvaient s'étendre à un système, ou plus précisément quelles hypothèses raisonnables on pouvait faire sur la non-linéarité afin d'utiliser les mêmes outils.

Soit G une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, G_x et G_y ses dérivées partielles ; on considère le système

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_g u + \alpha u - G_x(u, v) &= 0 \\ v_{tt} + \Delta_g v + \beta v - G_y(u, v) &= 0 \end{cases} \quad (1)$$

défini sur $M \times [0, +\infty[$ où (M, g) est une variété riemannienne compacte, α et β deux réels. Les hypothèses sur la fonction G sont les suivantes :

h0 $G(x, y)$ est de la forme $G(x, y) = \frac{1}{2}H(x^2, y^2)$.

h1 $H(x, y) = o(|x| + |y|)$ au voisinage de $(0, 0)$. En particulier $H_x(0, 0) = H_y(0, 0) = 0$.

h2 Il existe deux réels $A, B > 0$, un réel $p > 2$ tel que

$$G(x, y) > A(|x|^p + |y|^p) - B.$$

h3 On a :

(i) Il existe une direction $y = mx$ selon laquelle G_x/x et G_y/y tendent simultanément vers l'infini lorsque $x \rightarrow +\infty$.

(ii) Il existe deux réels A_1 et B_1 strictement positifs et un réel $q > 1$ tels que

$$\forall x, y > 0 \quad G_x(x, y) + G_y(x, y) - \alpha x - \beta y \geq A_1(x + y)^q - B_1.$$

h4 H est de classe C^2 convexe, $H_x(x, y)$ est une fonction croissante de x et décroissante de y et $H_y(x, y)$ est une fonction croissante de y et décroissante de x . Autrement dit la différentielle DG est T^2 -accrétive. (cf Paragraphe suivant).

On notera Ω le cylindre $M \times [0, +\infty[$, $\Omega_T = M \times]0, T[$, $K_T = \overline{\Omega_T}$.

Afin de préparer une extension à des systèmes d'ordre supérieur, on écrira aussi :

(u, v) sous la forme (u_1, u_2)

α_1 au lieu de α , α_2 au lieu de β

$G_1(u_1, u_2)$ au lieu de $G_x(u, v)$, et $G_2(u_1, u_2)$ au lieu de $G_y(u, v)$.

Le système (1) se met alors sous la forme

$$u_{itt} + \Delta_g u_i + \alpha_i u_i - G_i(u_1, u_2) = 0 \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2)$$

Lors de l'étude des solutions de (1) sur Ω , les conditions au bord de M seront définies respectivement par

BV $\partial M = \emptyset$ (pas de condition)

BD $\partial M \neq \emptyset$ et $u \equiv 0$ sur ∂M

BN $\partial M \neq \emptyset$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$ sur ∂M .

On notera λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_g$ avec les conditions au bord correspondantes. Dans le cas **BD**, **BN**, $\lambda_1 = 0$ est associée aux fonctions constantes, on notera λ_2 la première valeur propre non nulle. Dans le cas **BV** on notera ψ la fonction propre positive associée à λ_1 . On montrera

Théorème 1 *Toute solution (u, v) avec u et v positives de (1) converge dans $C^2(M)$, lorsque t tend vers $+\infty$, vers une solution positive (Φ_1, Φ_2) du problème stationnaire associé :*

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi_1 + \alpha \Phi_1 - G_x(\Phi_1, \Phi_2) &= 0 \\ \Delta_g \Phi_2 + \beta \Phi_2 - G_y(\Phi_1, \Phi_2) &= 0 \end{cases} \quad (3)$$

si G vérifie les hypothèses ci-dessus.

La démonstration repose sur une majoration a priori des solutions et un principe de comparaison ; elle généralise à un système celle donnée dans [4]. Afin d'alléger l'écriture, l'étude porte sur un système de deux équations, mais les hypothèses faites et les résultats obtenus se généralisent à un système de n équations (cf Paragraphe 8).

1.2 Les hypothèses

Les hypothèses **h1** et **h2** sont utiles pour justifier l'existence de solutions du problème considéré.

L'hypothèse **h3** (i) assure l'existence de sur-solutions au problème, **h3** (ii) fournit une majoration a priori des solutions.

Les hypothèses **h0** et **h4** suffisent à justifier le principe de comparaison des solutions. Détaillons ce dernier point, en commençant par quelques rappels.

Définition 1 Soit F une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 , dont la différentielle est notée DF . On dira que DF est T -accrétif si pour tout quadruplet $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$ de réels on a :

$$\left(F_x(x, y) - F_x(\tilde{x}, \tilde{y})\right)(x - \tilde{x})^+ + \left(F_y(x, y) - F_y(\tilde{x}, \tilde{y})\right)(y - \tilde{y})^+ \geq 0 \quad (4)$$

où f^+ désigne la partie positive de f , $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$. On dira que DF est strictement T -accrétif si de plus, pour $x > \tilde{x}$ et $y > \tilde{y}$, on a :

$$\left(F_x(x, y) - F_x(\tilde{x}, \tilde{y})\right)(x - \tilde{x})^+ + \left(F_y(x, y) - F_y(\tilde{x}, \tilde{y})\right)(y - \tilde{y})^+ > 0. \quad (5)$$

Lemme 1.1 Si F est une fonction convexe, $F_x(x, y)$ une fonction croissante de x et décroissante de y , $F_y(x, y)$ une fonction décroissante de x et croissante de y , alors DF est T -accrétif.

DÉMONSTRATION : Dans (4), si $(x - \tilde{x})$ et $(y - \tilde{y})$ sont tous deux négatifs, la quantité considérée est nulle ; si $(x - \tilde{x})$ et $(y - \tilde{y})$ sont tous deux positifs la positivité résulte de la convexité de F . Enfin si $(x - \tilde{x})$ est positif et $(y - \tilde{y})$ négatif, il ne reste que le premier terme, or

$$F_x(x, y) - F_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = F_x(x, y) - F_x(\tilde{x}, y) + F_x(\tilde{x}, y) - F_x(\tilde{x}, \tilde{y})$$

est par définition une somme de termes positifs. Le dernier cas se traite de façon similaire. $\square$

Lemme 1.2 Si F est de classe C^2 et si DF est T -accrétif, alors F est convexe, F_x est croissante par rapport à x , décroissante par rapport à y , F_y croissante par rapport à y , décroissante par rapport à x .

DÉMONSTRATION : Supposons que DF est T-accréatif et dans (4) posons $h = (x - \tilde{x})$ et $k = (y - \tilde{y})$. On a :

$$F_x(x, y) = F_x(\tilde{x}, \tilde{y}) + hF_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}) + kF_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) + o(|h| + |k|) \quad (6)$$

$$F_y(x, y) = F_y(\tilde{x}, \tilde{y}) + hF_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) + kF_{yy}(\tilde{x}, \tilde{y}) + o(|h| + |k|). \quad (7)$$

En faisant tendre h et k vers 0, la matrice hessienne doit vérifier en tout point $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$(h^+, k^+) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \geq 0$$

soit

$$rhh^+ + s(h^+k + hk^+) + tkk^+ \geq 0.$$

Si $h, k \geq 0$ c'est la convexité ; r et s sont positifs.

Si $h \leq 0, k \geq 0$ ou $h \geq 0, k \leq 0$ nécessairement $s \leq 0$. □

Corollaire 1.3 *Si de plus F est strictement convexe et si F_x (resp. F_y) est strictement monotone par rapport aux variables x ou y , DF est strictement T-accréatif.*

Proposition 1.4 *Les fonctions $F(x, y)$ de la forme $(ax^2 - 2bxy + cy^2)^r$ avec $1 \leq r$ et a, b, c strictement positifs vérifiant*

$$(r-1)^2b^2 \leq (r-1)^2ac \leq r^2b^2$$

sont telles que DF est strictement T-accréatif.

DÉMONSTRATION : Calculons directement la matrice hessienne de F , en notant $\varphi : u \mapsto u^r$ et en remarquant que $u = ax^2 - 2bxy + cy^2$ est strictement positif puisque $ac - b^2 > 0$.

$$F_x(u) = 2(ax - by)\varphi'(u) \quad (8)$$

$$F_{xx}(u) = 2(ax - by)^2\varphi''(u) + 2a\varphi'(u) \quad (9)$$

$$F_{yy}(u) = 2(cy - bx)^2\varphi''(u) + 2c\varphi'(u) \quad (10)$$

$$F_{xy}(u) = -2b\varphi'(u) + 4(ax - by)(-bx + cy)\varphi''(u) \quad (11)$$

Comme $\varphi'(u) > 0$ et $\varphi''(u) > 0$, on a $F_{xx} > 0$ et $F_{yy} > 0$; un calcul simple montre que $F_{xx}(u)F_{yy}(u) - F_{xy}^2(u)$ est positif, compte-tenu de $ac - b^2 > 0$. Il faut maintenant montrer que F_{xy} est négative. On a

$$F_{xy}(u) = 2ru^{r-2}((-4r+2)abx^2 + (-4ac + 4rca + 4rb^2)xy + (-4r+2)bcy^2)$$

Pour montrer que la quantité entre parenthèses est négative, les coefficients de x^2 et y^2 étant négatifs, il suffit de montrer que le discriminant

$$\delta = (-4ac + 4rca + 4rb^2)^2 - 4(-4r+2)ab(-4r+2)bc$$

est négatif. Comme

$$\delta = 16(ac - b^2)((r-1)^2ac - r^2b^2)$$

les hypothèses sur a, b, c entraînent $\delta < 0$. □

Pour comparer entre elles des solutions de (1), nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2 Soit F une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On dira que DF est T^2 -accrétif si pour tout quadruplet $(u, v, \tilde{u}, \tilde{v})$ de réels positifs la quantité

$$\left(\frac{F_x(u, v)}{u} - \frac{F_x(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{u}}\right)(u^2 - \tilde{u}^2)^+ + \left(\frac{F_y(u, v)}{v} - \frac{F_y(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{v}}\right)(v^2 - \tilde{v}^2)^+ \quad (12)$$

est positive. On définirait de même DF strictement T^2 -accrétif : la quantité (12) doit être strictement positive pour tout quadruplet $(u, v, \tilde{u}, \tilde{v})$ avec $u > \tilde{u}$ et $v > \tilde{v}$.

Proposition 1.5 Soit F une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . DF est T^2 -accrétif si et seulement s'il existe une application H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 avec DH T -accrétif telle que $F(x, y) = \frac{1}{2}H(x^2, y^2)$.

DÉMONSTRATION : La condition est manifestement suffisante.

Réciproquement, en posant $x^2 = \sigma, y^2 = v, \tilde{x}^2 = \tilde{\sigma}, \tilde{y}^2 = \tilde{v}^2$, la quantité

$$\left(\frac{F_x(\sqrt{\sigma}, \sqrt{v})}{\sqrt{\sigma}} - \frac{F_x(\sqrt{\tilde{\sigma}}, \sqrt{\tilde{v}})}{\sqrt{\tilde{\sigma}}}\right)(\sigma - \tilde{\sigma})^+ + \left(\frac{F_y(\sqrt{\sigma}, \sqrt{v})}{\sqrt{v}} - \frac{F_y(\sqrt{\tilde{\sigma}}, \sqrt{\tilde{v}})}{\sqrt{\tilde{v}}}\right)(v - \tilde{v})^+$$

est positive. Posons $H(\sigma, v) = 2F(\sqrt{\sigma}, \sqrt{v})$, la relation ci-dessus exprime exactement que DH est T-accréitif. $\square$

Un exemple de fonction G satisfaisant les hypothèses **h0** ... **h4** est donné par

$$G(x, y) = ax^4 - 2bx^2y^2 + cy^4$$

où a , b et c sont strictement positifs avec $ac - b^2 > 0$.

2 Propriétés Générales

2.1 Energie

Proposition 2.1 *Si u et v sont solutions de (1) alors*

$$E(u, v) = \frac{1}{2} \int_M (u_t^2 + v_t^2) - \frac{1}{2} \int_M (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \frac{1}{2} \int_M (\alpha u^2 + \beta v^2) - G(u, v)$$

est une quantité constante, i.e. indépendante de t .

DÉMONSTRATION : On multiplie la première relation par u_t , la deuxième par v_t et on intègre sur M . On a alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_M (u_t^2 + v_t^2) \right) = \int_M (u_{tt}u_t + v_{tt}v_t)$$

et grâce à la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_M (u_t \Delta_g u + v_t \Delta_g v) &= - \int_M (\nabla u \nabla u_t + \nabla v \nabla v_t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \int_M (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \right). \end{aligned}$$

Enfin $\frac{d}{dt} G(u, v) = G_x(u, v)u_t + G_y(u, v)v_t$. La quantité $E(u, v)$ ayant une dérivée nulle par rapport à t est constante. $\square$

2.2 Existence des solutions

Soit $K_T = M \times [0, T]$ et E l'ensemble des $(u, v) \in H^1(K_T) \times H^1(K_T)$ satisfaisant les conditions au bord de M avec $u(0, \cdot) \equiv v(0, \cdot) \equiv 0$ et $u(T, \cdot) \equiv v(T, \cdot) \equiv 0$. Considérons la fonctionnelle définie sur E par

$$J(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_M (u_t^2 + v_t^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - \frac{1}{2} \int_0^T \int_M (\alpha u^2 + \beta v^2 - 2G(u, v)) .$$

Lemme 2.2 *Si (u, v) est un extremum local de $J(u, v)$ alors (u, v) est solution faible de (1).*

DÉMONSTRATION : Soient φ et ξ deux fonctions test. Par hypothèse la fonction $(x, y) \mapsto J(u + x\varphi, v + y\xi)$ présente un extremum en $(0, 0)$ et ses dérivées par rapport à x et y en $(0, 0)$ sont nulles, ce qui donne

$$\int_0^T \int_M (u_t \varphi_t + \nabla u \nabla \varphi) + \int_0^T \int_M (-\alpha u + G_x(u, v)) \varphi = 0$$

$$\int_0^T \int_M (v_t \xi_t + \nabla v \nabla \xi) + \int_0^T \int_M (-\alpha v + G_y(u, v)) \xi = 0 \quad \square$$

Proposition 2.3 *Si $\alpha > \lambda_1$ ou $\beta > \lambda_1$ alors, pour T assez grand, il existe des solutions positives, non identiquement nulles, de (1) sur $M \times [0, T]$ satisfaisant les conditions au bord de M et telles que $u(0, \cdot) \equiv v(0, \cdot) \equiv 0$ et $u(T, \cdot) \equiv v(T, \cdot) \equiv 0$.*

DÉMONSTRATION : La fonctionnelle précédente admet un minimum absolu : d'après l'hypothèse **h2** et l'inégalité de Poincaré il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$J(u, v) \geq \int_{K_T} (A|u|^p - c_1 u^2 - B) + \int_{K_T} (A|v|^p - c_2 v^2 - B)$$

et d'après l'inégalité de Jensen cette dernière quantité est minorée. Elle admet donc un minimum absolu, atteint pour un couple (u, v) de fonctions que l'on peut choisir positives, puisque $J(u, v) = J(|u|, |v|)$.

Selon la technique habituelle [2] [3], on montre que ces solutions faibles sont solutions fortes de (1).

Il faut montrer que u ou v n'est pas identiquement nulle, pour cela montrons

que J prend des valeurs négatives.

Supposons $\alpha > \lambda_1$ par exemple. Soit ψ_1 une fonction propre de $-\Delta_g$ associée à λ_1 et $\Psi_1(x, t) = \psi_1(x) \sin(\frac{\pi t}{T})$. Un calcul simple montre que

$$J(k\Psi_1, 0) = C_1 k^2 + C_2$$

avec

$$C_1 = (\lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}) \int_M \Psi_1^2 - \int_M \alpha \Psi_1^2 \leq 0$$

d'après l'inégalité de Poincaré et

$$C_2 = G(k\Psi_1, 0).$$

Comme $G(u, v) = o(u^2 + v^2)$, pour k assez petit, la quantité $C_1 k^2 + C_2$ est donc négative. La démonstration est similaire dans le cas où $\beta > \lambda_1$. $\square$

Proposition 2.4 *Avec les mêmes notations que ci-dessus, si $\alpha > \lambda_1$ et $\beta > \lambda_1$, il existe une solution positive (u, v) avec $u \not\equiv 0$ et $v \not\equiv 0$.*

DÉMONSTRATION : D'après ce qui précède, $J(u, v)$ prend des valeurs négatives pour un couple $(\hat{u}, 0)$; montrons qu'un tel couple ne peut réaliser le minimum de J . Avec les notations ci-dessus :

$$J(\hat{u}, k\Psi_1) = J(\hat{u}, 0) + \frac{1}{2}k^2(\lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}) \int_M \Psi_1^2 - \frac{1}{2} \int_M k^2 \beta \Psi_1^2 + R$$

où

$$R = \int_0^T \int_M (G(\hat{u}, k\Psi_1) - G(\hat{u}, 0)).$$

En revenant à la fonction H on a :

$$G(\hat{u}, k\Psi_1) - G(\hat{u}, 0) = \frac{1}{2}H(\hat{u}^2, k^2\Psi_1^2) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2}k^2\Psi_1^2 H_y(\hat{u}^2, 0) + \frac{1}{4}k^4\Psi_1^4 H_{yy}(\hat{u}^2, \theta). \quad (14)$$

Or $H_y(\hat{u}^2, 0) \leq H_y(0, 0) = 0$; donc R est une quantité négative, pour k assez petit, ainsi que

$$\frac{1}{2}k^2(\lambda_1 + \frac{\pi^2}{T^2}) \int_M \Psi_1^2 - \frac{1}{2} \int_M k^2 \beta \Psi_1^2$$

d'où la conclusion. On montre de même que le minimum ne peut être atteint pour un couple de la forme $(0, \hat{v})$. $\square$

Le cas, plus délicat, où α et β encadrent λ_1 sera traité plus loin, lors de l'étude du problème stationnaire (cf. Théorème 2).

On étend facilement le résultat de la Proposition 2.3 si on impose des conditions de Dirichlet $u(0, x) = u_0(x)$ et $u(T, x) = u_1(x)$.

3 Homogénéisation

Dans cette partie on abandonne l'hypothèse **h4**, et on suppose simplement G convexe.

Prenons la moyenne sur M de chaque relation dans (1), on obtient en notant $\bar{f}$ la moyenne d'une fonction f sur M :

$$\bar{u}_{tt} + \alpha \bar{u} - \bar{G}_x(u, v) = 0 \quad (15)$$

$$\bar{v}_{tt} + \beta \bar{v} - \bar{G}_y(u, v) = 0 \quad (16)$$

avec $\bar{G}(u, v) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int G(u, v) dx$. Faisons la différence avec les relations de départ, multiplions respectivement par $u - \bar{u}$ et $v - \bar{v}$, on obtient

$$\begin{aligned} & (u - \bar{u})_{tt}(u - \bar{u}) + \alpha(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})_{tt}(v - \bar{v}) + \beta(v - \bar{v})^2 \\ & \quad + \Delta_g u(u - \bar{u}) + \Delta_g v(v - \bar{v}) \\ & = (G_x(u, v) - \bar{G}_x(u, v))(u - \bar{u}) + (G_y(u, v) - \bar{G}_y(u, v))(v - \bar{v}). \end{aligned}$$

Proposition 3.1 *Dans le cas où $\partial M = \emptyset$, soit λ_2 la première valeur propre non nulle du Laplacien. Si G est convexe, si $\alpha < \lambda_2$ et $\beta < \lambda_2$, alors $\int_M ((u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2) dx$ décroît exponentiellement vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.*

DÉMONSTRATION : Soit γ tel que $0 \leq \gamma \leq \min(\lambda_2 - \alpha, \lambda_2 - \beta)$. Intégrons sur M la relation précédente ; le terme de droite s'écrit encore

$$\int_M (G_x(u, v) - G_x(\bar{u}, \bar{v}))(u - \bar{u}) + (G_y(u, v) - G_y(\bar{u}, \bar{v}))(v - \bar{v})$$

et cette dernière quantité est positive puisque G est une fonction convexe. Par définition de λ_2 , comme $(u - \bar{u})$ est de moyenne nulle, on a :

$$- \int_M \Delta_g u(u - \bar{u}) = \int_M \|\nabla(u - \bar{u})\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda_2 \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2 \\
&\geq \alpha \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbf{M}} \Delta_g u (u - \bar{u}) + \alpha \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2 \leq -\gamma \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2.$$

De même pour v . En posant $\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{M}} ((u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2)$ on a :

$$\varphi''(t) = \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})_{tt} (u - \bar{u}) + (v - \bar{v})_{tt} (v - \bar{v}) + \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})_t^2 + (v - \bar{v})_t^2.$$

Donc $\varphi(t)$ satisfait l'inéquation différentielle :

$$\varphi''(t) - 2\gamma\varphi(t) \geq 0.$$

Comme φ est majorée, on en déduit que $\varphi(t) = O(e^{-\sqrt{2\gamma}t})$. □

4 Monotonie

4.1 Le cas où $\alpha \leq \lambda_1$, $\beta \leq \lambda_1$

Dans cette partie on abandonne l'hypothèse **h4** et on suppose simplement G T-accrétime.

Proposition 4.1 *Avec les hypothèses du Lemme 1.1, si (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ désignent deux couples de solutions définis sur $\mathbf{M} \times [t_1, t_2] = K$ vérifiant*

$$u \leq \tilde{u} \quad \text{et} \quad v \leq \tilde{v} \quad \text{sur} \quad \partial K$$

on a alors $u \leq \tilde{u}$ et $v \leq \tilde{v}$ sur K .

DÉMONSTRATION : A partir des relations satisfaites par $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$, en multipliant respectivement par $(u - \tilde{u})^+$ et $(v - \tilde{v})^+$ et en ajoutant, on a :

$$\begin{aligned}
&(u - \tilde{u})_{tt} (u - \tilde{u})^+ + \Delta_g (u - \tilde{u}) (u - \tilde{u})^+ \\
&\quad + (v - \tilde{v})_{tt} (v - \tilde{v})^+ + \Delta_g (v - \tilde{v}) (v - \tilde{v})^+ \\
&= (G_x(u, v) - G_x(\tilde{u}, \tilde{v})) (u - \tilde{u})^+ + (G_y(u, v) - G_y(\tilde{u}, \tilde{v})) (v - \tilde{v})^+ \\
&\quad - \alpha (u - \tilde{u}) (u - \tilde{u})^+ - \beta (v - \tilde{v}) (v - \tilde{v})^+.
\end{aligned}$$

Le Lemme 1.1 montre que

$$(u - \tilde{u})_{tt}(u - \tilde{u})^+ + \Delta_g(u - \tilde{u})(u - \tilde{u})^+ + (v - \tilde{v})_{tt}(v - \tilde{v})^+ + \Delta_g(v - \tilde{v})(v - \tilde{v})^+ + \alpha(u - \tilde{u})(u - \tilde{u})^+ + \beta(v - \tilde{v})(v - \tilde{v})^+ \geq 0.$$

En intégrant cette relation sur M , compte tenu de

$$\int_M \Delta_g(u - \tilde{u})(u - \tilde{u})^+ = - \int_M |\nabla(u - \tilde{u})^+|^2 \quad (17)$$

$$\leq -\lambda_1 \int_M (u - \tilde{u})^+ \quad (18)$$

on obtient, pour $\alpha \leq \lambda_1, \beta \leq \lambda_1$

$$\int_M \left((u - \tilde{u})_{tt}(u - \tilde{u})^+ + (v - \tilde{v})_{tt}(v - \tilde{v})^+ \right) \geq 0.$$

En posant

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_M \left((u - \tilde{u})^{+2} + (v - \tilde{v})^{+2} \right),$$

on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_M \left((u - \tilde{u})_t(u - \tilde{u})^+ + (v - \tilde{v})_t(v - \tilde{v})^+ \right) \\ \varphi''(t) &= \int_M \left((u - \tilde{u})_{tt}(u - \tilde{u})^+ + (v - \tilde{v})_{tt}(v - \tilde{v})^+ \right) \\ &\quad + \int_M \left((u - \tilde{u})_t^{+2} + (v - \tilde{v})_t^{+2} \right). \end{aligned}$$

La fonction φ est donc convexe, nulle en t_1 et t_2 , donc identiquement nulle. $\square$

4.2 Les solutions strictement positives

Dans le cas où α ou β est supérieur à λ_1 , la convexité de G ne suffit pas à assurer la monotonie ; c'est pour cela que l'on introduit l'hypothèse **h4**.

Traitons d'abord le cas des solutions strictement positives selon une méthode adaptée de Benguria-Brezis-Lieb [1]

Avec les mêmes notations que dans la démonstration de la Proposition 4.1, divisons chacune des relations caractérisant $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$ par u (resp. $\tilde{u}, v, \tilde{v}$),

faisons la différence et multiplions par $(u^2 - \tilde{u}^2)^+$ (resp. $(v^2 - \tilde{v}^2)^+$). La relation obtenue peut s'écrire $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$ avec

$$Q_1(u, \tilde{u}) = \left(\frac{u_{tt}}{u} - \frac{\tilde{u}_{tt}}{\tilde{u}} + \frac{\Delta_g u}{u} - \frac{\Delta_g \tilde{u}}{\tilde{u}} \right) (u^2 - \tilde{u}^2)^+ \quad (19)$$

$$Q_2(v, \tilde{v}) = \left(\frac{v_{tt}}{v} - \frac{\tilde{v}_{tt}}{\tilde{v}} + \frac{\Delta_g v}{v} - \frac{\Delta_g \tilde{v}}{\tilde{v}} \right) (v^2 - \tilde{v}^2)^+ \quad (20)$$

$$Q_3(u, \tilde{u}, v, \tilde{v}) = \left(\frac{G_x(u, v)}{u} - \frac{G_x(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{u}} \right) (u^2 - \tilde{u}^2)^+ \quad (21)$$

$$Q_4(u, \tilde{u}, v, \tilde{v}) = \left(\frac{G_y(u, v)}{v} - \frac{G_y(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{v}} \right) (v^2 - \tilde{v}^2)^+. \quad (22)$$

Si DG est T^2 -accrétif, la quantité $Q_3 + Q_4$ est positive ou nulle ; on a donc :

Proposition 4.2 *Supposons que DG est T^2 -accrétif ; si (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ désignent deux couples de solutions définis sur $M \times [t_1, t_2] = K$ vérifiant*

$$0 < u \leq \tilde{u} \quad \text{et} \quad 0 < v \leq \tilde{v} \quad \text{sur} \quad \partial K$$

on a alors $u \leq \tilde{u}$ et $v \leq \tilde{v}$ sur K .

DÉMONSTRATION : En appliquant la formule de Green, montrons le

Lemme 4.3 *Soient y et z deux fonctions strictement positives sur $K = [t_1, t_2] \times M$, appartenant à $C^0(K) \cap C^2(\overset{\circ}{K})$. On a :*

$$\begin{aligned} \int_M \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{y_{tt} + \Delta_g y}{y} - \frac{z_{tt} + \Delta_g z}{z} \right) (y^2 - z^2)^+ = \\ - \int_M \int_{t_1}^{t_2} \text{sgn}^+(y^2 - z^2) \left((zy_t - yz_t)^2 + (z\nabla y - y\nabla z)^2 \right) (y^{-2} + z^{-2}) \\ + \int_{\partial K} \frac{(y^2 - z^2)^+}{y} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma + \int_{\partial K} \frac{(y^2 - z^2)^+}{z} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma. \end{aligned}$$

Compte tenu qu'au bord $t = t_1$ et $t = t_2$, $(u - \tilde{u})^+$ et $(v - \tilde{v})^+$ sont nuls, le lemme donne :

$$\begin{aligned} \int_K Q_1 &= - \int_K \left((u\tilde{u}_t - \tilde{u}u_t)^2 + (u.\nabla\tilde{u} - \tilde{u}.\nabla u)^2 \right) (u^{-2} + \tilde{u}^{-2}) \text{sgn}^+(u^2 - \tilde{u}^2) \\ \int_K Q_2 &= - \int_K \left((v\tilde{v}_t - \tilde{v}v_t)^2 + (v.\nabla\tilde{v} - \tilde{v}.\nabla v)^2 \right) (v^{-2} + \tilde{v}^{-2}) \text{sgn}^+(v^2 - \tilde{v}^2). \end{aligned}$$

Or $\int_K(Q_3 + Q_4)$ est positive, donc $\int_K Q_1 = \int_K Q_2 = \int_K(Q_3 + Q_4) = 0$. Si DG est strictement T^2 -accrétif, la conclusion en découle aisément. Sinon, soit ω une composante connexe de $\{(x, t) | u(x, t) > \tilde{u}(x, t)\}$. Sur ω , $\int_K Q_1 = 0$ et $\int_K Q_2 = 0$ donc u et $\tilde{u}$ sont proportionnels. Si $\partial\omega \cap \partial K \neq \emptyset$ la relation au bord entraîne encore la conclusion ; si $\partial\omega$ ne rencontre pas ∂K , on aboutit à la même conclusion car $u = \tilde{u}$ sur $\partial\omega$. De même pour v et $\tilde{v}$. $\square$

4.3 Les solutions positives

Proposition 4.4 *Avec les hypothèses du Lemme 1.1, si (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ désignent deux couples de solutions positives, dont aucune n'est identiquement nulle, définis sur $M \times [t_1, t_2] = K$ vérifiant*

$$u \leq \tilde{u} \quad \text{et} \quad v \leq \tilde{v} \quad \text{sur} \quad \partial K$$

on a soit

(i) $u \leq \tilde{u}$ et $v \leq \tilde{v}$ sur K , soit

(ii) $\tilde{u}$ est proportionnel à u et $\tilde{v}$ est proportionnel à v .

D'après le principe du maximum, u et v sont strictement positives à l'intérieur de K . Afin d'éviter les problèmes liés à la nullité au bord, en particulier dans le cas **BD**, soit $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u} + 2\varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$ et $\tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v} + 2\varepsilon$. D'après la continuité de u et $\tilde{u}$ en $t = t_1$ et $t = t_2$, il existe un réel $\tau > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \tau] \cup [T - \tau, T] \quad (u_\varepsilon^2 - \tilde{u}_\varepsilon^2)^+(\cdot, t) \equiv 0.$$

Dans le cas **BD** la fonction $(u_\varepsilon^2 - \tilde{u}_\varepsilon^2)^+$ reste identiquement nulle sur $\partial M \times [t_1, t_2]$ pour les mêmes raisons. On a donc :

$$(u_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g u_\varepsilon + \alpha u_\varepsilon = G_x(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + \alpha \varepsilon \quad (23)$$

$$(\tilde{u}_\varepsilon)_{tt} + \Delta_g \tilde{u}_\varepsilon + \alpha \tilde{u}_\varepsilon = G_x(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon) + 2\alpha \varepsilon. \quad (24)$$

On peut donc multiplier (23) par $\frac{(u_\varepsilon^2 - \tilde{u}_\varepsilon^2)^+}{u_\varepsilon}$ et (24) par $\frac{(u_\varepsilon^2 - \tilde{u}_\varepsilon^2)^+}{\tilde{u}_\varepsilon}$ et faire la différence ; on obtient après intégration

$$\int_K Q_1(u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) = \int_K Q_3(u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon) + I_5$$

avec

$$I_5 = \int_K \alpha(u_\varepsilon^2 - \tilde{u}_\varepsilon^2)^+ \left(\frac{\varepsilon}{u_\varepsilon} - 2 \frac{\varepsilon}{\tilde{u}_\varepsilon} \right).$$

En procédant de la même façon avec v et $\tilde{v}$, on obtient

$$\int_K Q_2(v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon) = \int_K Q_4(u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon) + I_6$$

avec

$$I_6 = \int_K \beta(v_\varepsilon^2 - \tilde{v}_\varepsilon^2)^+ \left(\frac{\varepsilon}{v_\varepsilon} - 2 \frac{\varepsilon}{\tilde{v}_\varepsilon} \right).$$

L'intégrale de Q_1 et celle de Q_3 se calculent à l'aide du lemme 4.3 en remarquant que dans tous les cas les contributions aux bords sont nulles : on obtient alors une quantité négative. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\left| \frac{\varepsilon}{u_\varepsilon} - 2 \frac{\varepsilon}{\tilde{u}_\varepsilon} \right| \leq 3$$

puisque u et $\tilde{u}$ sont positifs. Le théorème de convergence dominée montre que $I_5 \rightarrow 0$. De même pour I_6 . Enfin, toujours par convergence dominée,

$$\int_K Q_3(u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon) + Q_4(u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$$

a pour limite

$$\int_K (Q_3 + Q_4)(u, \tilde{u}, v, \tilde{v})$$

Si DG est strictement T^2 -accrétif, on conclut aisément. Par contre si DG est simplement T^2 -accrétif, il est possible d'avoir $\tilde{u}$ proportionnel à u et $\tilde{v}$ proportionnel à v . $\square$

Corollaire 4.5 *Les résultats de la Proposition 4.4 restent vrais en remplaçant les solutions (u, v) par des sous-solutions vérifiant*

$$u_{tt} + \Delta_g u + \alpha u \geq G_x(u, v) \quad v_{tt} + \Delta_g v + \beta v \geq G_y(u, v)$$

et les solutions $(\tilde{u}, \tilde{v})$ par des sur-solutions vérifiant

$$\tilde{u}_{tt} + \Delta_g \tilde{u} + \alpha \tilde{u} \leq G_x(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \tilde{v}_{tt} + \Delta_g \tilde{v} + \beta \tilde{v} \leq G_y(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

5 Une majoration a priori

On suppose que G vérifie **h3**. Avec ces notations on a :

Lemme 5.1 *Soit $a > 0$, il existe une fonction $y(t)$ définie sur $[0, 2a]$ telle que $y'' \leq A_1 y^q - B_1$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 2a} y(t) = +\infty$.*

DÉMONSTRATION : Posons

$$k(t) = a^2 - (t - a)^2 \quad (25)$$

$$w(t) = k(t)^{-\frac{2}{q-1}}. \quad (26)$$

On a

$$w''(t) = \frac{4}{q-1} k(t)^{-\frac{q+1}{q-1}} + 8 \frac{q+1}{(q-1)^2} (a-t)^2 k(t)^{-\frac{2q}{q-1}}.$$

Cherchons y sous la forme $y(t) = C_1 w(t) + D$ où C_1 et D sont des constantes à déterminer de façon que $B_1 \leq -y'' + A_1 y^q$. Il suffit que

$$B_1 \leq -y'' + A_1 C_1^q w^q + A_1 D^q,$$

ou encore

$$0 \leq - \left(\frac{4C_1}{q-1} k(t) + \frac{8C_1(q+1)}{(q-1)^2} \right) (a-t)^2 + A_1 C_1^q \quad (27)$$

$$B_1 \leq A_1 D^q. \quad (28)$$

La deuxième condition donne immédiatement $D = (\frac{B_1}{A_1})^{\frac{1}{q}}$; la première est réalisée pour

$$\frac{a^2}{A_1} \frac{4(2+q)}{(q-1)^2} \leq C_1^{q-1}.$$

Selon une technique due à Ossermann [5] on a :

Proposition 5.2 *Il existe deux constantes C et D strictement positives telles que pour tout couple de solutions de (1) sur $M \times [0, 2a]$ on ait*

$$\max(u(a), v(a)) \leq C a^{-2/(q-1)} + D.$$

DÉMONSTRATION : Ajoutons les deux relations de (1), on obtient compte tenu de **h3**

$$(u + v)_{tt} + \Delta_g(u + v) \geq A_1(u + v)^q - B_1 \quad (29)$$

$$y_{tt} \leq A_1 y^q - B_1 \quad (30)$$

On retranche ces deux inégalités, on multiplie par $(u + v - y)^+$ et on intègre sur $M \times [0, 2a]$.

$$\begin{aligned} \iint (u + v - y)_{tt}(u + v - y)^+ + \iint \Delta_g(u + v)(u + v - y)^+ &\geq \\ \iint A_1 ((u + v)^q - y^q) (u + v - y)^+. &\quad (31) \end{aligned}$$

Le terme de droite est manifestement positif ou nul. Comme $(u + v - y)^+$ est nulle en $t = 0$ et $t = 2a$, en intégrant par parties, on constate que le terme de gauche est négatif ou nul. On a donc $(u + v - y)^+ \equiv 0$, ou encore

$$u(t) + v(t) \leq y(t) \quad \forall t \in]0, 2a[$$

et en particulier

$$u(a) + v(a) \leq y(a) = C a^{-\frac{2}{q-1}} + D$$

avec $C = \left(\frac{4(q+2)}{A_1(q-1)^2} \right)^{\frac{1}{q-1}}$. □

6 Le problème stationnaire

Le problème stationnaire associé à (1) est :

$$\begin{cases} \Delta_g u + \alpha u - G_x(u, v) &= 0 \\ \Delta_g v + \beta v - G_y(u, v) &= 0. \end{cases} \quad (32)$$

Puisque la quantité $(Q_3 + Q_4)(u, \tilde{u}, v, \tilde{v})$ est toujours positive, la propriété de monotonie est aussi satisfaite par les solutions de (32). Il existe donc au plus un couple (u, v) de solutions positives de (32) où ni u ni v ne sont identiquement nulles. On notera $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ un tel couple.

Dans le cas où $\partial M = \emptyset$ les solutions stationnaires sont nécessairement constantes.

Proposition 6.1 (i) *Pour $\alpha \leq \lambda_1$ et $\beta \leq \lambda_1$, la seule solution positive de (32) est la solution nulle.*

(ii) *Pour $\alpha > \lambda_1$ et $\beta > \lambda_1$, il existe trois solutions positives de (32) qui sont de la forme $(u, 0)$, $(0, v)$ et $(\tilde{u}, \tilde{v})$.*

DÉMONSTRATION : L'existence de ces solutions s'obtient, comme au paragraphe 2.2, par minimisation de la fonctionnelle :

$$JS(u, v) = \frac{1}{2} \int_M (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - \frac{1}{2} \int_M (\alpha u^2 + \beta v^2 - 2G(u, v)).$$

Il est clair que $u \equiv 0$ est solution de (32), de même $v \equiv 0$ est aussi solution de (32). Il est aussi clair que l'on ne peut invoquer le principe de comparaison pour des couples (u, v) dans lesquels u ou v sont nulles.

Pour **(i)** on multiplie les deux relations de (32) respectivement par u et v , on les additionne et on intègre sur M :

$$\int_M u \Delta_g u + \alpha u^2 + \int_M v \Delta_g v + \beta v^2 = \int_M (u G_x(u, v) + v G_y(u, v)). \quad (33)$$

Par définition de λ_1 , les deux intégrales du membre de gauche sont négatives, celle de droite est positive : toutes sont identiquement nulles.

Lorsque $\alpha > \lambda_1$ (resp. $\beta > \lambda_1$), on montre facilement [4] l'existence d'une solution de la forme $(u, 0)$ (resp. $(0, v)$). Comme au paragraphe 2.2, on montre que pour $\alpha > \lambda_1$ et $\beta > \lambda_1$, les points stationnaires $(0, v)$ et $(u, 0)$ ne réalisent pas le minimum de JS , d'où l'existence d'une troisième solution (u, v) . $\square$

Il reste un dernier cas à envisager, celui où α et β encadrent λ_1 ; pour simplifier nous traiterons le cas où $\alpha < \lambda_1 < \beta$; l'autre cas se traitant de façon similaire.

On sait déjà qu'il existe une fonction positive $\hat{v}$ solution de

$$\Delta_g \hat{v} + \beta \hat{v} = G_y(0, \hat{v}).$$

Dans (32) linéarisons la première relation autour de la solution $(0, \hat{v})$

$$\Delta_g u + \alpha u = u G_{xx}(0, \hat{v}).$$

Il s'agit d'un problème linéaire, dont on appellera α_0 la première valeur propre et u_0 une fonction propre associée, supposée strictement positive.

Etant donné β , on lui associe une fonction $\hat{v}$, un réel α_0 et une fonction u_0 qui vérifient :

$$\begin{cases} \Delta_g u_0 + \alpha_0 u_0 &= u_0 G_{xx}(0, \hat{v}). \\ \Delta_g \hat{v} + \beta \hat{v} &= G_y(0, \hat{v}). \end{cases} \quad (34)$$

Proposition 6.2 *Le problème stationnaire (32) admet une solution (u, v) , avec u et v non nulles, si et seulement si $\alpha > \alpha_0$.*

DÉMONSTRATION : Supposons qu'il existe une solution (u, v) avec u et v non nulles de (32) et $\alpha \leq \alpha_0$. En divisant respectivement par u , v , u_0 et $\hat{v}$, les relations (32) et (34) on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_g u}{u} - \frac{\Delta_g u_0}{u_0} \right) (u^2 - u_0^2) + \left(\frac{\Delta_g v}{v} - \frac{\Delta_g \hat{v}}{\hat{v}} \right) (v^2 - \hat{v}^2) + (\alpha - \alpha_0)(u^2 - u_0^2) = \\ & \left(\frac{G_x(u, \hat{v})}{u} - G_{xx}(0, \hat{v}) \right) (u^2 - u_0^2) + \left(\frac{G_y(u, v)}{v} - \frac{G_y(0, \hat{v})}{\hat{v}} \right) (v^2 - \hat{v}^2). \end{aligned} \quad (35)$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{2} H(x^2, y^2) \\ G_x(x, y) &= x H_x(x^2, y^2) \\ G_{xx}(x, y) &= 2x^2 H_{xx}(x^2, y^2) + H_x(x^2, y^2). \end{aligned}$$

Le terme de droite dans (35) est donc égal à

$$\left(H_x(u^2, v^2) - H_x(0, \hat{v}^2) \right) (u^2 - u_0^2) + \left(H_y(u^2, v^2) - H_y(0, \hat{v}^2) \right) (v^2 - \hat{v}^2)$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} & \left(H_x(u^2, v^2) - H_x(0, \hat{v}^2) \right) (u^2 - 0) + \left(H_y(u^2, v^2) - H_y(0, \hat{v}^2) \right) (v^2 - \hat{v}^2) \\ & + \left(H_x(u^2, v^2) - H_x(0, \hat{v}^2) \right) (-u_0^2) \end{aligned} \quad (36)$$

Dans (36) la somme des deux premiers termes est strictement positive, d'après la convexité de H ; u , v , $\hat{v}$ sont connus exactement, alors que u_0 est défini à une constante multiplicative près et peut être choisi arbitrairement petit de façon que (36) soit positive. On intègre sur M le terme de gauche dans (35)

$$(\alpha - \alpha_0) \int_M (u^2 - u_0^2) - I \quad (37)$$

avec

$$I = \int_M (|u_0 \nabla u - u \nabla u_0|^2 (u^{-2} + u_0^{-2}) + |\hat{v} \nabla v - v \nabla \hat{v}|^2 (v^{-2} + \hat{v}^{-2}))$$

d'après les calculs du Lemme 4.3. Donc, pour u_0 assez petit, la quantité (37) est strictement négative : on obtient bien une contradiction puisque l'intégrale du second membre de (35) est positive.

Supposons maintenant $\alpha > \alpha_0$ et montrons qu'il existe une solution (u, v) avec u et v non nulles ; pour cela on va montrer que $(0, \hat{v})$ ne réalise pas le minimum de JS. Soit

$$\mu(x) = \text{JS}(xu_0, \hat{v}).$$

On a

$$\mu''(0) = \int_M (|\nabla u_0|^2 - \alpha u_0^2 + u_0^2 G_{xx}(0, \hat{v})).$$

Ce qui s'écrit encore

$$\mu''(0) = \int_M (|\nabla u_0|^2 - \alpha_0 u_0^2 + u_0^2 G_{xx}(0, \hat{v})) + (\alpha_0 - \alpha) \int_M u_0^2.$$

Mais

$$\int_M (|\nabla u_0|^2 - \alpha_0 u_0^2 + u_0^2 G_{xx}(0, \hat{v}))$$

est nulle. En effet, d'après la définition de u_0 dans (34), on a

$$\Delta_g u_0 + \alpha_0 u_0 = u_0 G_{xx}(0, \hat{v})$$

ce qui donne, en multipliant par u_0 et en intégrant par parties,

$$\int_M (-|\nabla u_0|^2 + \alpha_0 u_0^2) = \int_M u_0^2 G_{xx}(0, \hat{v}). \quad (38)$$

Donc μ est concave au voisinage de 0 et $(0, \hat{v})$ ne réalise pas le minimum de JS. $\square$

Théorème 2 *Si le problème stationnaire (32) admet une solution (Φ_1, Φ_2) non nulle, alors il existe un réel T assez grand, tel que le problème (1) admette une solution (u, v) sur $K_T = [0, T] \times M$ vérifiant : $\forall x \in M, \quad u(0, x) = v(0, x) = u(T, x) = v(T, x) = 0$, avec u et v non nulles.*

Le seul cas non déjà traité est celui où α et β encadrent λ_1 . Comme ci-dessus on supposera $\alpha < \lambda_1 < \beta$ et on reprend les notations précédentes ; d'après la Proposition 6.2 l'hypothèse sur α est donc $\alpha > \alpha_0$. Puisque $\beta > \lambda_1$, il existe une fonction w définie sur K_T solution de

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta_g w - \beta w &= G_y(0, w) \\ w(0, \cdot) \equiv w(T, \cdot) &\equiv 0. \end{cases} \quad (39)$$

Considérons la fonction numérique μ_1 de la variable réelle k définie par

$$k \mapsto \mu_1(k) = J(ku_0 \sin(\pi t/T), w).$$

Pour simplifier, on supposera que u_0 est normalisée de façon que $\int_M u_0^2 = 2$; on note $\tilde{u} = u_0 \sin(\pi t/T)$, et

$$\xi(t) = \int_M u_0^2 (G_{xx}(0, w) - G_{xx}(0, \hat{v})).$$

Lemme 6.3 *On a $\mu_1''(0) = I_1 + I_2$ avec*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \int_M u_0^2 \sin^2(\pi t/T) (\alpha_0 + \frac{\pi^2}{T^2} - \alpha) \\ I_2 &= \int_0^T \int_M u_0^2 \sin^2(\pi t/T) (G_{xx}(0, w) - G_{xx}(0, \hat{v})) \\ &= \int_0^T \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : On a directement :

$$\mu_1''(0) = \int_0^T \int_M (\tilde{u}_t^2 + |\nabla \tilde{u}|^2 - \alpha \tilde{u}^2) + \int_0^T \int_M \tilde{u}^2 G_{xx}(0, w).$$

La première intégrale s'écrit encore :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \int_M \cos^2(\pi t/T) u_0^2 \frac{\pi^2}{T^2} + \dots \\ &\quad + \int_0^T \int_M \sin^2(\pi t/T) (|\nabla u_0|^2 + (\alpha_0 - \alpha) u_0^2 - \alpha_0 u_0^2). \end{aligned}$$

Compte tenu de (38), on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \sin^2(\pi t/T) \int_M (|\nabla u_0|^2 - \alpha_0 u_0^2) \\ &\quad + \int_0^T \int_M u_0^2 \sin^2(\pi t/T) (\alpha_0 + \frac{\pi^2}{T^2} - \alpha) \\ &= - \int_0^T \sin^2(\pi t/T) \int_M u_0^2 G_{xx}(0, \hat{v}) + I_1 \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. $\square$

Lemme 6.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel T_1 tel que, $\forall T > 2T_1$ on ait :*

$$|G_{xx}(0, w_T(t, x)) - G_{xx}(0, v(t, x))| < \varepsilon, \quad \forall (t, x) \in [T_1, T - T_1] \times M.$$

DÉMONSTRATION : : Dans [4] on démontre que lorsque T tend vers l'infini, les fonctions w_T solutions de (39) dans K_T convergent en croissant, pour la topologie $C^2(M)$ vers une solution W de

$$W_{tt} + \Delta_g W + \beta W = G_y(0, W) \quad \text{dans} \quad [0, +\infty[\times M$$

et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t, \cdot) = \hat{v}$, où $\hat{v}$ est solution du problème stationnaire c.f. (34). En outre les solutions w_T sont symétriques par rapport à $T/2$. $\square$

DÉMONSTRATION : Nous allons montrer que $\mu_1''(0)$ est négatif. D'abord, puisque $\alpha > \alpha_0$, il existe un réel ε_1 ne dépendant que de u_0 , α et α_0 tel que $I_1 < -\varepsilon_1 T$ pour tout T assez grand.

La fonction ξ est une fonction uniformément bornée ; soit M_1 un majorant de ξ .

Dans le Lemme 6.4, choisissons T_1 correspondant à $\varepsilon = \varepsilon_1/2$. On a :

$$I_2 = \int_0^{T_1} \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt + \int_{T_1}^{T-T_1} \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt + \int_{T-T_1}^T \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt$$

avec

$$\int_0^{T_1} \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt + \int_{T-T_1}^T \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt \leq 2 \frac{M_1 \pi^2}{3} \left(\frac{T_1^3}{T^2} \right)$$

et

$$\int_{T_1}^{T-T_1} \xi(t) \sin^2(\pi t/T) dt < \varepsilon_1 T/2.$$

Pour T_1 assez grand et T_1^3/T^2 assez petit on aura

$$\mu_1''(0) = I_1 + I_2 < 0.$$

D'où la conclusion. $\square$

7 Comportement asymptotique des solutions

Sauf mention explicite du contraire, on suppose α , β et T tels qu'il existe des solutions du problème de Dirichlet sur Ω_T . Lorsqu'on résoudra un problème sur Ω_T on ne précisera pas les conditions sur le bord $\partial M \times [0, T]$ puisqu'elles découlent de **BV**, **BD**, **BN**. On notera simplement s un couple (u, v) solution de (1), et s_T le couple (u_T, v_T) solution de (1) sur K_T avec u_T et v_T nulles pour $t = 0$ et $t = T$ prolongée par 0 sur $M \times [T, +\infty[$.

Si $s = (u, v)$ et $\tilde{s} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ sont deux couples, on dira que $s \leq \tilde{s}$ si on a $u \leq \tilde{u}$ et $v \leq \tilde{v}$.

Pour alléger l'écriture on écrira le système (1) sous la forme (2)

7.1 Minoration des solutions

Comme conséquence immédiate du principe de comparaison, on a :

Proposition 7.1 *Soit $s = (u, v)$ avec $u, v \in C^0(K_T) \cap C^2(\Omega_T)$ une solution positive de (1) sur Ω_T . On a alors :*

$$s_T \leq s \quad \text{sur } \Omega_T.$$

Nous allons maintenant définir une solution positive "minimum" du problème (1) sur Ω .

Proposition 7.2 *Il existe une solution positive γ , solution de (1) sur Ω , telle que pour $(x, t) \in \Omega$ fixé, la famille $s_T(x, t)$ converge en croissant vers $\gamma(x, t)$ lorsque T tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : La Proposition 7.1 montre que $s_T \leq s_{T'}$ si $T \leq T'$ et la Proposition 5.2 que s_T est majorée uniformément par rapport à T . Lorsque T parcourt les entiers naturels, les suites (u_n) et (v_n) convergent ponctuellement vers des fonctions γ_1 et γ_2 positives. Soit T arbitraire ; pour $n > T$, les solutions u_n (resp. v_n) appartiennent à un borné de $C^{2,\beta}(\Omega_T)$. L'injection de $C^{2,\beta}(\Omega_T)$ dans $C^2(\Omega_T)$ étant compacte, il existe une suite extraite qui converge dans $C^2(\Omega_T)$ vers γ_1 (resp. γ_2), donc la restriction de (γ_1, γ_2) à Ω_T est

solution de (1). □

Proposition 7.3 *Pour tout t, σ positifs, on a :*

$$\gamma_1(t, \cdot) \leq \gamma_1(t + \sigma, \cdot) \quad , \quad \gamma_2(t, \cdot) \leq \gamma_2(t + \sigma, \cdot).$$

DÉMONSTRATION : Choisissons un réel T et un réel $\varrho > \sigma$; posons $w_1(t, \cdot) = u_{T+\varrho}(t + \sigma, \cdot)$ et $w_2(t, \cdot) = v_{T+\varrho}(t + \sigma, \cdot)$. La fonction $w_1(t, \cdot)$ (resp $w_2(t, \cdot)$) est définie pour $-\sigma < t < T + \varrho + \sigma$. Pour $t = 0$, $w_1(0, \cdot) \geq 0$ et pour $t = T$, $w_1(T, \cdot) \geq 0$; de même pour w_2 . D'après le principe de comparaison sur Ω_T on a donc $w_1(t, \cdot) \geq u_T(t, \cdot)$ soit encore

$$u_{T+\varrho}(t + \sigma) \geq u_T(t, \cdot).$$

De même pour w_2 et v . En faisant tendre T vers l'infini, on obtient

$$\gamma_i(t + \sigma, \cdot) \geq \gamma_i(t, \cdot) \quad i \in \{1, 2\}. \quad \square$$

Proposition 7.4 *Soit $y_i(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_i(x, t)$, pour $i \in \{1, 2\}$. Le couple (y_1, y_2) est une solution positive du problème stationnaire (32).*

DÉMONSTRATION : Pour x fixé, $y_i(x)$ est limite monotone de $\gamma_i(t, x)$, $i \in \{1, 2\}$, lorsque t tend vers l'infini. Par compacité et unicité de la limite, il existe une suite t_n tendant vers l'infini, telle que $\gamma_i(t_n, \cdot)$ converge dans $C^2(M)$ vers y_i .

Passons à la limite faible dans l'équation (1). Soit ξ une fonction C^∞ à support strictement inclus dans $[0, 1]$. Multiplions par ξ la relation de définition de γ_i et intégrons entre t et $t + 1$.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \gamma_{i\,tt}(x, \tau) \xi(\tau - t) d\tau = \\ \int_t^{t+1} \left(G_i(\gamma_1(x, \tau), \gamma_2(x, \tau)) - \alpha_i \gamma_i(x, \tau) \Delta_g \gamma_i(x, \tau - t) \right) \xi(\tau - t) d\tau \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \int_0^1 \gamma_{i\,tt}(x, t + \tau) \xi(\tau) d\tau = \\ \int_0^1 \left(G_i(\gamma_1(x, t + \tau), \gamma_2(x, t + \tau)) - \alpha_i \gamma_i(x, t + \tau) \Delta_g \gamma_i(x, \tau) \right) \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est égal à

$$\int_0^1 \gamma_i(x, t + \tau) \xi_{tt}(\tau) d\tau.$$

En faisant tendre t vers l'infini, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \gamma_i(x, t + \tau) \xi_{tt}(\tau) d\tau = y_i(x) \int_0^1 \xi_{tt}(\tau) d\tau = 0 \quad (40)$$

puisque ξ est à support strictement inclus dans $[0, 1]$. De même :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(G_i(\gamma_1(x, t + \tau), \gamma_2(x, t + \tau)) - \alpha_i \gamma_i(x, t + \tau) - \Delta_g \gamma_i(x, \tau) \right) \xi(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \left(G_i(y_1(x, t + \tau), y_2(x, t + \tau)) - \alpha_i y_i(x, t + \tau) - \Delta_g y_i(x) \right) \xi(\tau) d\tau \\ &= \left(-\Delta_g y_i(x) - \alpha_i y_i(x) + G_i(y_1(x), y_2(x)) \right) \int_0^1 \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La nullité de cette dernière expression, d'après (40), montre que y est une solution positive du problème stationnaire. $\square$

Les techniques précédentes de comparaison montrent immédiatement que toute solution $\tilde{s}$ positive de (1) sur Ω est minorée par γ : avec les notations précédentes la Propriété 7.1 entraîne $\tilde{s} \geq u_n$ pour tout n , et donc par passage à la limite $\tilde{s} \geq \gamma$.

7.2 Majoration des solutions

Cherchons une fonction ω majorante possédant des propriétés analogues à celles de γ .

Lemme 7.5 *Pour k_1, k_2 assez grands, le couple de fonctions z_1, z_2 défini dans le cas **BD** par $z_i = k_i \sqrt{\psi}$ et dans le cas **BV**, **BN** par $z_i(x) = k_i$ est une sur-solution du problème stationnaire. (ψ désigne toujours une fonction propre de $-\Delta_g$ associée à λ_1).*

DÉMONSTRATION : Dans le cas **BV**, **BN** on choisit k_1, k_2 tels que $G_i(k_1, k_2) > 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Dans le cas **BD**, on considère donc $y_i(x) = k_i \sqrt{\psi}$, $i \in \{1, 2\}$. On a alors

$$\Delta_g \sqrt{\psi} = \frac{\Delta_g \psi}{2\sqrt{\psi}} - \frac{|\nabla \psi|^2}{4\psi^{3/2}}.$$

Donc

$$\Delta_g y_i + \alpha_i y_i - G_i(y_1, y_2) = \left((\lambda_1 + \alpha_i) k_i \psi - \frac{k_i |\nabla \psi|^2}{2\psi} - 2\sqrt{\psi} G_i(y_1, y_2) \right) / 2\sqrt{\psi}.$$

D'après le lemme de Hopf, $|\nabla \psi|^2$ n'est pas nul sur ∂M ; il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $(\lambda_1 + 2\alpha_1) k_i \psi - \frac{k_i |\nabla \psi|^2}{2\psi}$ est négatif pour x voisin de ∂M avec $\psi(x) < \varepsilon$, et ceci quelque soit k_i .

Pour les x tels que $\psi(x) > \varepsilon$, choisissons les constantes k_i telle que

$$2\sqrt{\psi} G_i(k_1\sqrt{\psi}, k_2\sqrt{\psi}) > (\lambda_1 + 2\alpha_i) k_i \psi \quad (41)$$

ou encore

$$\frac{G_i(k_1\sqrt{\psi}, k_2\sqrt{\psi})}{k_i\sqrt{\psi}} > (\lambda_1 + 2\alpha_i)/2 \quad i \in \{1, 2\}$$

ce qui est toujours possible grâce à l'hypothèses **h3 (i)**.

On construit bien ainsi une sur-solution (z_1, z_2) du problème. $\square$

Lorsqu'on utilisera un couple (z_1, z_2) dans la suite, on supposera implicitement que k_1, k_2 satisfont, selon les conditions au bord, les conditions ci-dessus.

Pour T assez grand, soit s^T la solution de (1) définie sur $M \times [0, T]$ avec $s_i^T(x, 0) = s_i^T(x, T) = z_i(x)$ et prolongée à $M \times [0, +\infty[$ par $s_i^T(x, t) = z_i(x)$ pour $t > T$. La solution s^T est à valeurs positives.

En application du Corollaire 4.5, puisque (z_1, z_2) est sur-solution du problème, on montre :

Lemme 7.6 *Pour toute solution s^T ainsi définie, on a :*

$$\forall x \in M \quad \forall t \in [0, T] \quad s_i^T(x, t) \leq z_i(x), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Proposition 7.7 *Il existe une solution positive ω_k de (1) sur Ω , telle que pour $(x, t) \in \Omega_T$ fixé, la famille $s^T(x, t)$ converge en décroissant vers $\omega_k(x, t)$ lorsque T tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : Le principe de comparaison et le lemme précédent montrent que $s^T \geq s^{T'}$ si $T \leq T'$. La suite (s^n) converge donc ponctuellement vers un couple $(\omega_{k1}, \omega_{k2})$. On montre, comme dans la Proposition 7.2, que la restriction de ω_k à Ω_T est solution de (1). $\square$

De manière analogue à celle de la proposition 7.3, on montre :

Proposition 7.8 *Pour tout t, σ positifs, on a : $\omega_k(t, \cdot) \geq \omega_k(t + \sigma, \cdot)$.*

Comme pour la Proposition 7.4, en multipliant par une fonction test et en passant à la limite faible, on a :

Proposition 7.9 *Soit $Y_i(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{k_i}(x, t)$ $i \in \{1, 2\}$. Le couple (Y_1, Y_2) est une solution positive du problème stationnaire, qui est nécessairement égale à (Φ_1, Φ_2) .*

7.3 Démonstrations

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 1 lorsqu'il existe des solutions au problème de Dirichlet sur Ω_T pour T assez grand.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 : Compte tenu de l'estimation de la Proposition 5.2 il existe un instant t_0 , tel que pour $t > t_0$, $u(x, t) < D + 1$ (resp. $v(x, t) < D + 1$) .

Dans le cas **BV**, **BN**, il est facile de déterminer un couple (k_1, k_2) satisfaisant les hypothèses du Lemme 7.5 afin que pour $t > t_0$

$$u(x, t) \leq Y_1(x) = k_1 \quad , \quad v(x, t) \leq Y_2(x) = k_2.$$

Dans le cas **BD**, les estimations de Schauder montrent que u (resp. v) est bornée dans $C^2([T - 1, T + 1] \times M)$ uniformément par rapport à T pour T assez grand ; donc $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t)$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial n}(x, t)$) est uniformément majoré, pour t assez grand et pour $x \in \partial M$. Puisque $\frac{\partial Y_i}{\partial n}(x) = k_i \frac{\partial \psi}{\partial n}(x)$: il existe k_0 et $\varepsilon > 0$ tel que $u(x, t) < Y_1(x)$ (resp. $v(x, t) < Y_2(x)$) si $d(x, \partial M) < \varepsilon$, $k_1 > k_0$, $k_2 > k_0$, $t > t_0$. Quitte à augmenter encore k_1 et k_2 , puisque u est uniformément bornée, on aura

$$\forall t > t_0 \quad \forall x \in M \quad \text{et} \quad u(x, t) \leq Y_1(x) \quad v(x, t) \leq Y_2(x).$$

Par translation en temps, puisque le problème est autonome, on se ramène dans les deux cas à

$$\forall t \geq 0 \quad u(x, t) \leq Y_1(x) \quad , \quad v(x, t) \leq Y_2(x).$$

D'après le principe de comparaison, s est inférieure à chacune des fonctions u^T ; en passant à la limite on a :

$$u(x, t) \leq \omega_k(x, t). \tag{42}$$

Comme nous avons aussi

$$\gamma_i(x, t) \leq s_i(x, t) \quad i \in \{1, 2\}$$

on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_k(x, t) = \Phi(x). \quad \square$$

Lorsque $\alpha < \lambda_1$ et $\beta < \lambda_1$ on dispose d'un résultat plus général que le Théorème 1, car on n'impose pas de condition sur le signe de u :

Théorème 3 *Lorsque $\alpha \leq \lambda_1$ et $\beta \leq \lambda_1$, toute solution de (1) définie sur Ω tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION : On multiplie (2) par u_1 (resp. u_2) et on intègre sur Ω_T

$$\int_M \int_0^T (u_i u_{i t t} + u_i \Delta_g u_i + \alpha_i u_i^2) = G_i(u_1, u_2).$$

Or

$$\begin{aligned} \int_M u_i \Delta_g u_i &= - \int_M (\nabla u_i)^2 \\ \int_0^T u_i u_{i t t} &= u_i u_{i t} |_0^T - \int_0^T u_{i t}^2 \end{aligned}$$

d'où

$$- \int_M \int_0^T u_{i t}^2 + \int_M \int_0^T (\alpha_i u_i^2 - \nabla u_i^2) - \int_M \int_0^T u_i G_i(u_1, u_2) + \int_M u_i u_{i t} |_0^T = 0. \quad (43)$$

Ajoutons les deux relations obtenues pour $i = 1$ et $i = 2$. Puisque $\alpha_i \leq \lambda_1$ la deuxième intégrale est négative ou nulle d'après l'inégalité de Poincaré, la dernière est donc positive, ce qui revient à dire que la fonction

$$w(t) = \frac{1}{2} \int_M (u_1^2(x, t) + u_2^2(x, t)) dx$$

est convexe puisque sa dérivée $w'(t) = \int u_1(u_{1 t} + u_2 u_{2 t})$ est croissante. Cette fonction est bornée à l'infini d'après la Proposition 5.2 et les estimations de Schauder, sa dérivée tend vers 0 à l'infini ; en reportant dans (43) on voit

que chacune des intégrales tend vers 0, puisqu'elles sont de même signe. Remarquons que dans ce cas, la seule solution du problème stationnaire est le couple $(0, 0)$ et le Théorème 1 est encore vérifié.

Lorsque $\beta > \lambda_1 > \alpha$ (resp. $\beta < \lambda_1 < \alpha$), la solution majorante ω existe encore, et sa limite Y est encore solution du problème stationnaire. Si la seule solution du problème stationnaire est de la forme $(0, \hat{v})$ ou $(\hat{u}, 0)$, la limite de la solution majorante ω , Y possède une composante nulle, et on peut appliquer le même raisonnement par encadrement que ci-dessus. Si le problème stationnaire possède les trois types de solution, grâce au Théorème 2, il existe des solutions au problème de Dirichlet sur K_T pour T assez grand, et on peut appliquer la démonstration précédente.

7.4 Décroissance exponentielle

Nous avons déjà introduit la fonctionnelle $JS(z)$ définie par

$$JS(a, b) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla a|^2 + |\nabla b|^2 - \alpha a^2 - \beta b^2 + G(a, b))$$

Le minimum de cette fonctionnelle est atteint pour le couple de fonctions (Φ_1, Φ_2) solution du problème stationnaire (32). Soient ϕ et ξ deux fonctions données, la fonction $h : k \mapsto JS(\Phi_1 + k\phi, \Phi_2 + k\xi)$ possède un minimum pour $k = 0$; sa dérivée seconde (par rapport à k) évaluée en 0 est donc positive ou nulle.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dk} &= \int_M (\nabla \Phi_1 \nabla \phi + k |\nabla \phi|^2 + \nabla \Phi_2 \nabla \xi + k |\nabla \xi|^2 \\ &\quad - \alpha(\Phi_1 \phi + k \phi^2) - \beta(\Phi_2 \xi + k \xi^2) + G_x(\Phi_1 + k\phi, \Phi_2 + k\xi) \phi \\ &\quad + G_y(\Phi_1 + k\phi, \Phi_2 + k\xi) \xi) \end{aligned} \quad (44)$$

ce qui conduit à la relation

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 h}{dk^2} \right|_{k=0} &= \int_M (|\nabla \phi|^2 + |\nabla \xi|^2 - \alpha \phi^2 - \beta \xi^2 \\ &\quad + G_{xx}(\Phi_1, \Phi_2) \phi^2) + 2G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2) \phi \xi + G_{yy}(\Phi_1, \Phi_2) \xi^2) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Soit $JR(\phi, \xi)$ le second membre de (45) ; cette fonctionnelle est homogène de degré 2 ; soit μ le minimum de $JR(\phi, \xi)$ sous la contrainte $h(\phi, \xi) = \int_M (\phi^2 + \xi^2) = 1$.

Lemme 7.10 μ est strictement positive.

DÉMONSTRATION : On sait que μ est le multiplicateur de Lagrange issu du problème de minimisation et que la solution (u_0, v_0) de ce problème vérifie

$$\left. \frac{dJS}{d\phi} \right|_{u=u_0, v=v_0} = \mu \left. \frac{dh}{d\phi} \right|_{u=u_0, v=v_0} \quad (46)$$

$$\left. \frac{dJS}{d\xi} \right|_{u=u_0, v=v_0} = \mu \left. \frac{dh}{d\xi} \right|_{u=u_0, v=v_0} \quad (47)$$

Remarquons que par hypothèse $G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2)$ est négatif. On a donc

$$JS(|u|, |v|) = JS(u, v) + 2G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2)(|u||v| - uv) \leq JS(u, v)$$

Ceci montre que l'on peut toujours choisir u_0 et v_0 positives.

Supposons $\mu = 0$; u_0 et v_0 sont alors solutions du système :

$$\begin{cases} -\Delta_g u_0 - \alpha u_0 + G_{xx} u_0 + G_{xy} v_0 &= 0 \\ -\Delta_g v_0 - \beta v_0 + G_{xy} u_0 + G_{yy} v_0 &= 0 \end{cases}$$

où on a écrit G_{xx} au lieu de $G_{xx}(\Phi_1, \Phi_2)$, etc.

En choisissant comme fonctions tests les fonctions Φ_1 et Φ_2 on aura les deux relations

$$\int_M (\nabla u_0 \cdot \nabla \Phi_1 - \alpha u_0 \Phi_1 + G_{xx} u_0 \Phi_1 + G_{xy} v_0 \Phi_1) = 0 \quad (48)$$

$$\int_M (\nabla v_0 \cdot \nabla \Phi_2 - \beta v_0 \Phi_2 + G_{xy} u_0 \Phi_2 + G_{yy} v_0 \Phi_2) = 0. \quad (49)$$

En écrivant maintenant que Φ_1 et Φ_2 sont solutions faibles de (32) avec comme fonctions test u_0 et v_0 , on obtient :

$$\int_M (-\nabla u_0 \cdot \nabla \Phi_1 + \alpha u_0 \Phi_1 - G_x u_0) = 0 \quad (50)$$

$$\int_M (-\nabla v_0 \cdot \nabla \Phi_2 + \beta v_0 \Phi_2 - G_y v_0) = 0. \quad (51)$$

Ajoutons (48), (50), (49) et (51). On obtient

$$\int_M u_0 \{G_{xx} \Phi_1 - G_x - G_{xy} \Phi_2\} + \int_M v_0 \{G_{yy} \Phi_2 - G_y - G_{xy} \Phi_1\} = 0. \quad (52)$$

En revenant à H (en écrivant H_{xx} au lieu de $H_{xx}(\Phi_1^2, \Phi_2^2), \dots$ etc.), on a

$$G_x = \Phi_1 H_x \quad , \quad G_{xx} = 2\Phi_1^2 H_{xx} + H_x \quad , \quad G_{xy} = 2\Phi_1 \Phi_2 H_{xy}.$$

La quantité à intégrer dans (52) s'écrit encore, à un facteur multiplicatif près,

$$\Phi_1^3 H_{xx} u_0 + \Phi_1^2 \Phi_2 H_{xy} v_0 + \Phi_2^2 \Phi_1 H_{xy} u_0 + \Phi_2^3 H_{yy} v_0$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 u_0 H_{xx} & \Phi_2 u_0 H_{xy} \\ \Phi_1 v_0 H_{xy} & \Phi_2 v_0 H_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Cette dernière quantité est donc strictement positive, car la matrice ci-dessus est définie positive ; en effet la trace est positive car, u_0, v_0, Φ_1 et Φ_2 sont positives, ainsi que le déterminant à cause de la convexité de H . Il y a donc une contradiction. $\square$

On a $\mu > 0$ et

$$JR(\phi, \xi) \geq \mu \int_M (\phi^2 + \xi^2) \quad , \quad \forall (\phi, \xi) \in H^1(M) \times H^1(M). \quad (54)$$

Soit (u, v) une solution positive quelconque de (1) sur Ω , posons

$$u = \Phi_1 + \tilde{u} \quad v = \Phi_2 + \tilde{v}.$$

D'après le Théorème 1, $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ tendent vers 0 uniformément par rapport à t , lorsque $t \rightarrow +\infty$. On a

$$G_x(u, v) = G_x(\Phi_1, \Phi_2) + G_{xx}(\Phi_1, \Phi_2)\tilde{u} + G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2)\tilde{v} + O(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$$

$$G_y(u, v) = G_y(\Phi_1, \Phi_2) + G_{yx}(\Phi_1, \Phi_2)\tilde{u} + G_{yy}(\Phi_1, \Phi_2)\tilde{v} + O(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2).$$

En reportant dans (1) on obtient, compte tenu que Φ_1 et Φ_2 sont solutions du problème stationnaire,

$$\tilde{u}_{tt} + \Delta_g \tilde{u} + \alpha \tilde{u} = \tilde{u} G_{xx}(\Phi_1, \Phi_2) + \tilde{v} G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2) + O(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (55)$$

$$\tilde{v}_{tt} + \Delta_g \tilde{v} + \beta \tilde{v} = \tilde{u} G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2) + \tilde{v} G_{yy}(\Phi_1, \Phi_2) + O(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2). \quad (56)$$

Multiplions (55) par $\tilde{u}$ et (56) par $\tilde{v}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_M (\tilde{u}_{tt}\tilde{u} + \tilde{v}_{tt}\tilde{v}) = \\ \int_M \left(\tilde{u}^2 G_{xx}(\Phi_1, \Phi_2) + 2\tilde{u}\tilde{v} G_{xy}(\Phi_1, \Phi_2) + \tilde{v}^2 G_{yy}(\Phi_1, \Phi_2) - \alpha\tilde{u}^2 - \beta\tilde{v}^2 \right) \\ + \int_M O(\tilde{u}^3 + \tilde{v}^3). \end{aligned}$$

En posant

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \int_M (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$$

on a

$$\eta''(t) = \int_M (\tilde{u}\tilde{u}_{tt} + \tilde{v}\tilde{v}_{tt}) + \int_M (\tilde{u}_t^2 + \tilde{v}_t^2).$$

D'après (54), η satisfait, pour t assez grand, une inéquation différentielle de la forme

$$0 \leq \eta'' - K\eta \quad \text{avec} \quad K > 0.$$

D'après le principe du maximum, comme η est bornée, elle décroît exponentiellement vers 0 i.e. $\eta(t) = O(\exp(-\sqrt{K}t))$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Montrons la décroissance exponentielle de $\tilde{u}, \tilde{v}$ en norme C^2 . On a

$$\tilde{u}\tilde{u}_{tt} + \Delta_g \tilde{u} = G_x(\Phi_1, \Phi_2) - \lambda\tilde{u} + O(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) = \rho(x, t). \quad (57)$$

Pour t assez grand, ρ est une fonction bornée sur $\omega =]t-1, t+2[\times M$. On peut donc appliquer les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg [2] avec $p = 2$ et $\omega' =]t, t+1[\times M$,

$$\|\tilde{u}\|_{W^{2,2}(\omega')} \leq C\|\rho\|_{L^2(\omega)} + C'\|\tilde{u}\|_{L^2(\omega)}.$$

Donc $\|\tilde{u}\|_{W^{2,2}(\omega')}$ décroît exponentiellement lorsque $t \rightarrow +\infty$. Mais $W^{2,2}(\omega')$ est inclus dans $L^q(\omega')$ pour q tel que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. On peut donc, si besoin est, itérer le procédé, et montrer que $\forall q > 2$ $\|\tilde{u}\|_{W^{2,q}(\omega')}$ décroît exponentiellement vers 0.

En utilisant les injections de Sobolev, on voit que $\|u - \Phi_1\|$ dans $C^{1,\beta}$ décroît exponentiellement vers 0 ; en utilisant le théorème de Schauder on obtient la décroissance exponentielle de $\|u - \Phi_1\|_2$. $\square$

On obtient le même résultat pour $\tilde{v}$.

Une conséquence intéressante de ces estimations est

Proposition 7.11 *Pour tout couple de fonctions positives (nulles au bord dans le cas **BV**) $(u_0, v_0) \in C(M) \times C(M)$, il existe une unique solution positive (u, v) de (1) continue sur $M \times [0, +\infty[$ qui vérifie $u(0, \cdot) = u_0$, $v(0, \cdot) = v_0$.*

DÉMONSTRATION : On construit cette solution comme limite des solutions (u_n, v_n) de (1) sur $M \times [0, 2^n]$ avec $u_n(0, x) = u_0(x)$, $v_n(0, x) = v_0(x)$ et $u_n(2^n, x) = 0$, $v_n(2^n, x) = 0$. D'où l'existence.

Pour l'unicité : considérons deux solutions (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$. On se place sur $[0, T]$; avec les notations de la Propriété 4.4, le Lemme 4.3 permet encore le calcul de $\int f(Q_1 + Q_2)$ mais il reste la contribution en $t = T$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient de même en posant

$$\begin{aligned} I &= - \int_K \left((u\tilde{u}_t - \tilde{u}u_t)^2 + (u \cdot \nabla \tilde{u} - \tilde{u} \cdot \nabla u)^2 \right) (u^{-2} + \tilde{u}^{-2}) \operatorname{sgn}^+(u^2 - \tilde{u}^2) \\ J &= - \int_K \left((v\tilde{v}_t - \tilde{v}v_t)^2 + (v \cdot \nabla \tilde{v} - \tilde{v} \cdot \nabla v)^2 \right) (v^{-2} + \tilde{v}^{-2}) \operatorname{sgn}^+(v^2 - \tilde{v}^2). \end{aligned}$$

la relation

$$I + J - \int_M \frac{(u^2 - v^2)^+}{u} u_t \Big|_{t=T} - \int_M \frac{(u^2 - v^2)^+}{v} v_t \Big|_{t=T} \leq 0.$$

Lorsque $T \rightarrow +\infty$, les termes de bord tendent vers 0, et la conclusion reste identique. $\square$

8 En dimension supérieure

Dans cette partie nous allons voir comment étendre les résultats précédents à un système de n équations de la forme

$$u_{itt} + \Delta_g u_i + \alpha_i u_i - G_i(u_1, \dots, u_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (58)$$

Les hypothèses correspondantes sur la fonction G sont alors

h'0 $G(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme $G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}H(x_1^2, \dots, x_n^2)$.

h'1 $H(x_1, \dots, x_n) = o(\sum |x_i|)$ au voisinage de $(0, 0)$.

En particulier $H_i(0, \dots, 0) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$.

h'2 Il existe deux réels $A, B > 0$, un réel $p > 2$ tel que

$$G(x_1, \dots, x_n) > A(\sum |x_i|^p) - B.$$

h'3 On a :

- (i) Il existe une direction selon laquelle les $G_i(x_1, \dots, x_n)/x_i$ tendent simultanément vers l'infini lorsque x_i tend vers l'infini.
- (ii) Il existe deux réels A_1 et B_1 strictement positifs et un réel $q > 1$ tels que

$$\forall(x_1, \dots, x_n) \quad \sum_i \left(G_i(x_1, \dots, x_n) - \alpha_i x_i \right) \geq A_1 \left(\sum_i x_i \right)^q - B_1.$$

h'4 H est de classe C^2 convexe, les dérivées croisées H_{ij} pour $i \neq j$ sont toutes négatives.

Les démonstrations précédentes s'adaptent facilement au cas de (58). Les hypothèses **h'1** et **h'2** permettent de montrer l'existence de solutions au problème. L'hypothèse **h'3** assure encore l'existence de sur-solutions et la majoration de type Osseman.

Les arguments utilisés pour montrer la décroissance exponentielle utilisent uniquement la convexité de H et restent donc valables ; le seul point délicat est au niveau du Lemme 7.10. Le terme dont on doit montrer la stricte positivité s'écrit, dans le cas du problème (58), en notant $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ la solution stationnaire et $(w_1 \dots w_n)$ l'analogue de (u_0, v_0) .

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^2 H_{11} & \Phi_1 \Phi_2 H_{12} & \dots & \Phi_1 \Phi_n H_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_n \Phi_1 H_{n1} & \Phi_n \Phi_2 H_{n2} & \dots & \Phi_n^2 H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 w_1 H_{11} & \Phi_1 w_2 H_{12} & \dots & \Phi_1 w_n H_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_n w_1 H_{n1} & \Phi_n w_2 H_{n2} & \dots & \Phi_n w_n H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_n \end{pmatrix}.$$

Dans cette dernière expression, la matrice considérée est définie positive ; en effet si on regarde le signe des déterminants emboîtés D_k correspondant aux

k premières lignes et colonnes, ils ont le même signe que les déterminants extraits de la matrice Hessienne de H qui est définie positive.

Montrons que la propriété de T^2 -accrétivité reste satisfaite avec les hypothèses **h'0** et **h'4** ; on doit avoir :

$$\sum_i \left(\frac{G_i(u_1, \dots, u_n)}{u_i} - \frac{G_i(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)}{\tilde{u}_i} \right) (u_i^2 - \tilde{u}_i^2)^+ > 0.$$

Considérons le premier membre, qui s'écrit encore

$$\tau = \sum_i (H_i(u_1^2, \dots, u_n^2) - H_i(\tilde{u}_1^2, \dots, \tilde{u}_n^2)) (u_i^2 - \tilde{u}_i^2)^+.$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que :

$$(u_i^2 - \tilde{u}_i^2)^+ > 0, \quad 1 \leq i \leq k \quad (59)$$

$$(u_i^2 - \tilde{u}_i^2)^+ = 0, \quad k < i \leq n. \quad (60)$$

on a alors

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^k (H_i(u_1^2, \dots, u_n^2) - H_i(\tilde{u}_1^2, \dots, \tilde{u}_k^2, u_{k+1}^2, \dots, u_n^2)) (u_i^2 - \tilde{u}_i^2)^+ \\ &\quad + \sum_{p=k+1}^n \sum_{i=1}^k (H_i(\dots, u_p^2, \dots) - H_i(\dots, \tilde{u}_p^2, \dots)) (u_i^2 - \tilde{u}_i^2). \end{aligned}$$

La somme double est positive, car H_i est une fonction décroissante des variables x_j pour $i \neq j$, alors que la somme simple est positive d'après la convexité de H et de la restriction de H aux surfaces $x_i = \text{constante}$, $k < i \leq n$.

Voyons maintenant la généralisation du Théorème 2 ; le seul cas non trivial est celui où certains des α_i sont inférieurs à λ_1 et les autres supérieurs. Sans nuire à la généralité, supposons donc, pour le problème stationnaire,

$$\alpha_i \leq \lambda_1, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{et} \quad \alpha_i > \lambda_1, \quad k < i \leq n$$

Le système linéarisé devient alors

$$\begin{cases} u_{i,tt} + \Delta_g u_i + \alpha_i u_i &= u_i G_{ii}(0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_n), \quad 1 \leq i \leq k \\ u_{i,tt} + \Delta_g u_i + \alpha_i u_i &= G_i(0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_n), \quad k < i \leq n. \end{cases} \quad (61)$$

Chacun des problèmes linéarisés, $1 \leq i \leq k$, possède donc une première valeur propre α_i^0 associée à une fonction propre u_i^0 . On démontre de façon analogue la

Proposition 8.1 *Le problème stationnaire associé à (58) possède une solution $(u_1, \dots, u_n)$ avec les u_i tous non nuls, si et seulement si*

$$\forall i \in [1, k] \quad \alpha_i > \alpha_i^0.$$

puis ensuite le

Théorème 4 *Si le problème stationnaire associé à (58) possède une solution $(u_1, \dots, u_n)$ avec les u_i tous non nuls, alors pour T assez grand, le problème (58) possède une solution $(u_1, \dots, u_n)$ avec les u_i tous non nuls, sur $[0, T] \times M$ et telle que les u_i soient nuls aux bords $t = 0$ et $t = T$.*

On peut ensuite généraliser facilement les résultats obtenus, dans le cas de deux équations, au cas de n équations.

9 Etude d'un cas particulier

Dans cette section nous allons étudier le problème "modèle" correspondant à $H(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$ et donc $G(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^4$, avec les conditions BD.

9.1 Le problème stationnaire

Le problème stationnaire correspondant est

$$\begin{cases} \Delta_g u + \alpha u &= u(4u^2 - 2v^2) \\ \Delta_g v + \beta v &= v(4v^2 - 2u^2). \end{cases} \quad (62)$$

Essayons de préciser la valeur de α_0 associée au problème linéarisé ; avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe 4.2

$$\begin{cases} \Delta_g u_0 + \alpha_0 u_0 &= -2u_0 \hat{v}^2 \\ \Delta_g \hat{v} + \beta \hat{v} &= 4\hat{v}^3. \end{cases} \quad (63)$$

Proposition 9.1 *On a :*

$$2\alpha_0 + \beta - 3\lambda_1 = - \int_M \left(2 \frac{|u_0 \nabla \psi - \psi \nabla u_0|^2}{u_0^2} - \frac{|\hat{v} \nabla \psi - \psi \nabla \hat{v}|^2}{\hat{v}^2} \right) \quad (64)$$

où ψ désigne une fonction propre associée à λ_1 normalisée ($\int \psi = 1$).

DÉMONSTRATION : On divise la première relation de (63) par $u_0/2$, la deuxième par $\hat{v}$, on ajoute, on multiplie par ψ^2 et on intègre sur M ; on obtient, compte tenu de $\int \psi = 1$:

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + \beta &= - \int_M \left(2\Delta_g u_0 \frac{\psi^2}{u_0} \Delta_g u_0 + \frac{\psi^2}{\hat{v}} \Delta_g \hat{v} \right) \\ &= 3 \int_M |\nabla \psi|^2 - 2 \int_M \left(\frac{|u_0 \nabla \psi - \psi \nabla u_0|^2}{u_0^2} \right) - \left(\frac{|\hat{v} \nabla \psi - \psi \nabla \hat{v}|^2}{\hat{v}^2} \right). \end{aligned}$$

□

Dans le cas où $M = [0, 1]$, quelques essais numériques montrent que le second membre de (64) est négligeable, de l'ordre de 10^{-2} , de sorte qu'il y aura existence de solutions stationnaires (Φ_1, Φ_2) lorsque $2\alpha + \beta > 3\lambda_1$ (resp. $\alpha + 2\beta > 3\lambda_1$ lorsque $\beta < \alpha$).

Il est possible d'affiner l'estimation uniforme du paragraphe 5.

Proposition 9.2 *Soit (u, v) une solution de (1) sur $K_T = M \times [0, T]$, nulle au bord $t = 0$ et $t = T$ avec les conditions **BV** ou **BD** ; on a*

$$\sup_{(x,t) \in K_T} (u_{x,t}^2 + v_{x,t}^2) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

DÉMONSTRATION : Soient u_{max} (resp. v_{max}) le maximum de u (resp. v) sur K_T . Au point où ce maximum est atteint pour u , on a $u_{tt} + \Delta_g u < 0$, ce qui entraîne

$$\alpha u_{max} \geq 4u_{max}^3 - 2u_{max}v^2 \geq 4u_{max}^3 - 2u_{max}v_{max}^2.$$

De même pour v ,

$$\beta v_{max} \geq 4v_{max}^3 - 2v_{max}u^2 \geq 4v_{max}^3 - 2v_{max}u_{max}^2.$$

Après division, respectivement par u_{max} et v_{max} , on ajoute les deux relations pour obtenir $u_{max}^2 + v_{max}^2 \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. □

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0444	0.0847	0.1172	0.1383	0.1456	0.1383	0.1172	0.0847	0.0444
0.2	0.0883	0.1688	0.2338	0.2761	0.2909	0.2761	0.2338	0.1688	0.0883
0.3	0.1310	0.2508	0.3480	0.4116	0.4337	0.4116	0.3480	0.2508	0.1310
0.4	0.1714	0.3287	0.4567	0.5406	0.5699	0.5406	0.4567	0.3287	0.1714
0.5	0.2082	0.3996	0.5557	0.6582	0.6939	0.6582	0.5557	0.3996	0.2082
0.6	0.2401	0.4610	0.6412	0.7595	0.8007	0.7595	0.6412	0.4610	0.2401
0.7	0.2658	0.5105	0.7100	0.8408	0.8864	0.8408	0.7100	0.5105	0.2658
0.8	0.2847	0.5467	0.7601	0.8999	0.9485	0.8999	0.7601	0.5467	0.2847
0.9	0.2962	0.5686	0.7905	0.9357	0.9861	0.9357	0.7905	0.5686	0.2962
1.0	0.3000	0.5760	0.8007	0.9476	0.9987	0.9476	0.8007	0.5760	0.3000

Table 1: Valeurs de u_2

9.2 Résultats numériques

Nous avons rassemblé ci-dessus quelques résultats numériques correspondant au cas où $M = [0, 1]$. On a calculé les solutions correspondant au problème (1) sur $M \times [0, T]$, nulles au bord $t = 0$ et $t = T$. On note (u_2, v_2) la solution correspondant à $T = 2$, (u_3, v_3) celle correspondant à $T = 3$ et (u_4, v_4) celle pour $T = 4$.

On a choisi $\alpha = 10$ et $\beta = 20$; en effet la première valeur propre du Laplacien sur $M \times [0, 2]$ est $\lambda' = 5\pi^2/4 \approx 12.337$, et pour avoir des solutions sur $M \times [0, 2]$, il faut que $2\alpha + \beta > 3\lambda' \approx 37.011$.

La majoration précédente, compte tenu de $u(x, t) \leq v(x, t)$, donne

$$v_{max} \leq \frac{1}{2}\sqrt{30} \approx 2.7386$$

Les tableaux suivants donnent les valeurs de u et v pour un maillage de pas 0.1 en x et t . On n'a pas indiqué les valeurs en $x = 0$ et $x = 1$ car elles sont nulles par hypothèse ; de plus comme les solutions sont symétriques par rapport à $T/2$, seule la première moitié du tableau est écrite.

Il est facile de vérifier que les solutions sont bien ordonnées selon le principe de comparaison.

Les tableaux 7 et 8 montrent que les fonctions $u(\cdot, T/2)$ et $v(\cdot, T/2)$ tendent vers la solution (Φ_1, Φ_2) du problème stationnaire associé.

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1381	0.2598	0.3530	0.4106	0.4301	0.4106	0.3530	0.2598	0.1381
0.2	0.2654	0.4978	0.6736	0.7811	0.8171	0.7811	0.6736	0.4978	0.2654
0.3	0.3744	0.6990	0.9406	1.0863	1.1346	1.0863	0.9406	0.6990	0.3744
0.4	0.4618	0.8579	1.1480	1.3201	1.3766	1.3201	1.1480	0.8579	0.4618
0.5	0.5281	0.9769	1.3006	1.4900	1.5517	1.4900	1.3006	0.9769	0.5281
0.6	0.5762	1.0620	1.4084	1.6088	1.6737	1.6088	1.4084	1.0620	0.5762
0.7	0.6094	1.1203	1.4815	1.6888	1.7556	1.6888	1.4815	1.1203	0.6094
0.8	0.6309	1.1577	1.5281	1.7396	1.8076	1.7396	1.5281	1.1577	0.6309
0.9	0.6428	1.1786	1.5540	1.7677	1.8363	1.7677	1.5540	1.1786	0.6428
1.0	0.6466	1.1852	1.5623	1.7767	1.8455	1.7767	1.5623	1.1852	0.6466

Table 2: Valeurs de v_2

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0538	0.1027	0.1419	0.1673	0.1761	0.1673	0.1419	0.1027	0.0538
0.2	0.1071	0.2046	0.2831	0.3341	0.3518	0.3341	0.2831	0.2046	0.1071
0.3	0.1591	0.3044	0.4217	0.4981	0.5246	0.4981	0.4217	0.3044	0.1591
0.4	0.2088	0.3997	0.5542	0.6549	0.6899	0.6549	0.5542	0.3997	0.2088
0.5	0.2548	0.4880	0.6766	0.7994	0.8421	0.7994	0.6766	0.4880	0.2548
0.6	0.2961	0.5668	0.7854	0.9274	0.9766	0.9274	0.7854	0.5668	0.2961
0.7	0.3318	0.6348	0.8787	1.0366	1.0911	1.0366	0.8787	0.6348	0.3318
0.8	0.3618	0.6915	0.9559	1.1264	1.1851	1.1264	0.9559	0.6915	0.3618
0.9	0.3861	0.7373	1.0180	1.1981	1.2600	1.1981	1.0180	0.7373	0.3861
1.0	0.4053	0.7733	1.0663	1.2538	1.3180	1.2538	1.0663	0.7733	0.4053
1.1	0.4200	0.8006	1.1028	1.2956	1.3615	1.2956	1.1028	0.8006	0.4200
1.2	0.4306	0.8204	1.1292	1.3257	1.3928	1.3257	1.1292	0.8204	0.4306
1.3	0.4378	0.8338	1.1469	1.3459	1.4138	1.3459	1.1469	0.8338	0.4378
1.4	0.4420	0.8415	1.1571	1.3575	1.4258	1.3575	1.1571	0.8415	0.4420
1.5	0.4434	0.8440	1.1604	1.3612	1.4297	1.3612	1.1604	0.8440	0.4434

Table 3: Valeurs de u_3

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1424	0.2679	0.3637	0.4230	0.4430	0.4230	0.3637	0.2679	0.1424
0.2	0.2738	0.5133	0.6942	0.8048	0.8417	0.8048	0.6942	0.5133	0.2738
0.3	0.3865	0.7212	0.9700	1.1197	1.1693	1.1197	0.9700	0.7212	0.3865
0.4	0.4775	0.8864	1.1853	1.3624	1.4205	1.3624	1.1853	0.8864	0.4775
0.5	0.5474	1.0117	1.3460	1.5412	1.6047	1.5412	1.3460	1.0117	0.5474
0.6	0.5994	1.1039	1.4627	1.6698	1.7368	1.6698	1.4627	1.1039	0.5994
0.7	0.6374	1.1706	1.5464	1.7617	1.8309	1.7617	1.5464	1.1706	0.6374
0.8	0.6648	1.2185	1.6063	1.8272	1.8980	1.8272	1.6063	1.2185	0.6648
0.9	0.6845	1.2528	1.6492	1.8741	1.9460	1.8741	1.6492	1.2528	0.6845
1.0	0.6985	1.2774	1.6799	1.9077	1.9805	1.9077	1.6799	1.2774	0.6985
1.1	0.7084	1.2947	1.7017	1.9316	2.0050	1.9316	1.7017	1.2947	0.7084
1.2	0.7153	1.3068	1.7167	1.9481	2.0220	1.9481	1.7167	1.3068	0.7153
1.3	0.7197	1.3146	1.7266	1.9590	2.0331	1.9590	1.7266	1.3146	0.7197
1.4	0.7223	1.3190	1.7322	1.9652	2.0395	1.9652	1.7322	1.3190	0.7223
1.5	0.7231	1.3205	1.7340	1.9671	2.0415	1.9671	1.7340	1.3205	0.7231

Table 4: Valeurs de v_3

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.1079	0.2061	0.2852	0.3366	0.3544	0.3366	0.2852	0.2061	0.1079
0.4	0.2104	0.4028	0.5583	0.6598	0.6950	0.6598	0.5583	0.4028	0.2104
0.6	0.2985	0.5714	0.7916	0.9347	0.9842	0.9347	0.7916	0.5714	0.2985
0.8	0.3653	0.6980	0.9647	1.1365	1.1956	1.1365	0.9647	0.6980	0.3653
1.0	0.4105	0.7829	1.0790	1.2682	1.3330	1.2682	1.0790	0.7829	0.4105
1.2	0.4387	0.8353	1.1488	1.3479	1.4158	1.3479	1.1488	0.8353	0.4387
1.4	0.4553	0.8659	1.1892	1.3937	1.4633	1.3937	1.1892	0.8659	0.4553
1.6	0.4645	0.8827	1.2113	1.4187	1.4892	1.4187	1.2113	0.8827	0.4645
1.8	0.4690	0.8910	1.2222	1.4310	1.5019	1.4310	1.2222	0.8910	0.4690
2.0	0.4704	0.8935	1.2255	1.4347	1.5057	1.4347	1.2255	0.8935	0.4704

Table 5: Valeurs de u_4

t/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.2742	0.5140	0.6952	0.8059	0.8429	0.8059	0.6952	0.5140	0.2742
0.4	0.4782	0.8878	1.1871	1.3644	1.4225	1.3644	1.1871	0.8878	0.4782
0.6	0.6006	1.1059	1.4653	1.6728	1.7399	1.6728	1.4653	1.1059	0.6006
0.8	0.6665	1.2215	1.6101	1.8315	1.9024	1.8315	1.6101	1.2215	0.6665
1.0	0.7011	1.2820	1.6858	1.9143	1.9873	1.9143	1.6858	1.2820	0.7011
1.2	0.7195	1.3143	1.7264	1.9588	2.0330	1.9588	1.7264	1.3143	0.7195
1.4	0.7295	1.3318	1.7484	1.9831	2.0579	1.9831	1.7484	1.3318	0.7295
1.6	0.7348	1.3411	1.7602	1.9961	2.0713	1.9961	1.7602	1.3411	0.7348
1.8	0.7373	1.3456	1.7659	2.0025	2.0779	2.0025	1.7659	1.3456	0.7373
2.0	0.7381	1.3470	1.7676	2.0044	2.0798	2.0044	1.7676	1.3470	0.7381

Table 6: Valeurs de v_4

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_2	0.4053	0.7733	1.0663	1.2538	1.3180	1.2538	1.0663	0.7733	0.4053
u_3	0.4434	0.8440	1.1604	1.3612	1.4297	1.3612	1.1604	0.8440	0.4434
u_4	0.4704	0.8935	1.2255	1.4347	1.5057	1.4347	1.2255	0.8935	0.4704
Φ_1	0.4765	0.9047	1.2402	1.4514	1.5231	1.4514	1.2402	0.9047	0.4765

Table 7: Convergence vers la solution stationnaire de u

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
v_2	0.6466	1.1852	1.5623	1.7767	1.8455	1.7767	1.5623	1.1852	0.6466
v_3	0.7231	1.3205	1.7340	1.9671	2.0415	1.9671	1.7340	1.3205	0.7231
v_4	0.7381	1.3470	1.7676	2.0044	2.0798	2.0044	1.7676	1.3470	0.7381
Φ_2	0.7396	1.3509	1.7741	2.0126	2.0886	2.0126	1.7741	1.3509	0.7396

Table 8: Convergence vers la solution stationnaire de v

Références

- [1] Benguria R., Brézis H., Lieb E.H. The Thomas-Fermi-Von Weiszacker theory of atoms and molecules, *Comm. Math. Phys.* **79** (1980) 167-180.
- [2] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1983).
- [3] Kavian O. *Introduction à la théorie des points critiques*, Mathématiques & Applications **13** Springer-Verlag (1993).
- [4] Licois J-R. Asymptotiques d'un Système Conservatif associé à une Equation Elliptique non Linéaire. *à paraître*
- [5] Ossermann R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$, *Pacific Jl. Math.* **7** (1957) 1641-1647.

Sur une classe d'équations elliptiques, non linéaires, conservatives dans un cylindre

Jean-René LICOIS¹

3 Octobre 1994

1 Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte sans bord ; considérons les solutions de

$$u_{tt} + \Delta_M u - \lambda u + u^q = 0 \quad (1)$$

avec $(x, t) \in [0, +\infty[\times M$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $q > 1$. On étudie le comportement asymptotique (i.e. lorsque $t \rightarrow +\infty$) des solutions positives de (1) ; en particulier on s'intéresse à la propriété d'homogénéisation asymptotique des solutions. On étudiera aussi le problème stationnaire correspondant :

$$\Delta_M u - \lambda u + u^q = 0 \quad (2)$$

Soit λ_2 la première valeur propre non nulle du Laplacien sur M caractérisée par

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} \mid u \in W^{1,2}(M) \setminus \{0\} \text{ tq } \int_M u = 0 \right\}.$$

On voit immédiatement que

$$\mu = \lambda^{\frac{1}{q-1}} \quad (3)$$

¹Université de Tours — Faculté des Sciences et Techniques. Parc de Grandmont. 37200 Tours FRANCE

est un point stationnaire de (1).

Dans un article précédent [9] on démontre que toute solution positive de

$$y_{tt} + \Delta_M y + \lambda y - y^q = 0 \quad (4)$$

avec $u \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0$) sur ∂M tend vers la solution positive Φ du problème stationnaire associé $\Delta_M = f(u)$ avec décroissance exponentielle de $\|u - \Phi\|_\infty$. Ce problème est sensiblement le même que l'étude des solutions de signe variable de (4) : si u est solution de (1) pour $q = 2$, alors $v = \lambda - u$ est solution de (4) et presque toujours de signe variable.

Dans le cas où $M = S^1$ (avec $\lambda_2 = 1$), on montre au Théorème 2 que le problème stationnaire

$$u_{xx} - \lambda u + u^q = 0$$

n'admet pas de solution positive non constante lorsque $(q - 1)\lambda \leq \lambda_2$.

Si on note $\bar{u}$ la moyenne sur M d'une solution, on peut conjecturer que pour toutes les solutions positives de (1), $(u - \bar{u})$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. On montre le résultat partiel suivant :

Théorème 1 *Toute solution de (1) qui vérifie*

$$\forall (x, t) \in M \times [0, +\infty[\quad 0 < u(x, t) \leq \left(\frac{\lambda + \lambda_2}{q} \right)^{1/(q-1)}$$

s'homogénéise.

On montre d'autre part, dans le cas de S^1 , que pour $(q - 1)\lambda > \lambda_2$, il existe des solutions "solitons" de la forme $u(x, t) = \phi(x + \alpha t)$ où ϕ est une fonction numérique 2π -périodique ; ces solutions ne s'homogénéisent pas.

On montre aussi :

Proposition 1.1 *Supposons $q < \frac{n+3}{n-1}$. Il existe une constante C dépendant de M et de q telle que, pour toute solution positive, bornée, de (1) sur $M \times \mathbb{R}$ on ait*

$$\|u\|_{L^\infty(M \times \mathbb{R})} < C \cdot \lambda^{\frac{1}{q-1}}$$

Les difficultés rencontrées dans la résolution de ce problème tiennent à plusieurs facteurs, qui sont d'ailleurs interdépendants :

- l'opérateur considéré n'est pas monotone
- il n'y a pas unicité de la solution positive du problème de Dirichlet sur un "pavé" $[0, T] \times M$.
- les solutions considérées sont instables, ce qui rend difficile toute approche numérique.
- pour une même donnée initiale $u(0)$, il peut y avoir des comportements radicalement différents des solutions.

Par exemple, correspondant à une même donnée initiale $u(x, 0) = \mu = \lambda^{1/(q-1)}$, on trouve

- la solution constante $u(x, t) = \mu$
- une solution décroissant exponentiellement vers 0
- une infinité de solutions homogènes (indépendantes de x) qui oscillent périodiquement autour de μ .

2 Le problème stationnaire

2.1 Le problème sur S^1

Nous commencerons par étudier le problème stationnaire sur S^1 .

$$u_{xx} - \lambda u + u^q = 0 \quad (5)$$

Il existe deux solutions "évidentes" au problème (5) la solution nulle et la solution constante $u(x) = \mu = \lambda^{1/(q-1)}$.

Lemme 2.1 *Si u est une solution de (5) alors :*

$$\int_{S^1} u_x^2 (\lambda + \lambda_2 - qu^{q-1}) \leq 0. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION : On multiplie (5) par u_{xx} et on intègre sur S^1

$$\int_{S^1} (\Delta u)^2 - \lambda u \Delta u + u^q \Delta u = 0.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_{S^1} ((\Delta u)^2 + \lambda u_x^2 - q u^{q-1} u_x^2) = 0.$$

Or u_x est une fonction de moyenne nulle sur la sphère ; d'après la définition de λ_2 on a

$$\int_{S^1} u_{xx}^2 \geq \lambda_2 \int_{S^1} u_x^2 \quad (7)$$

ce qui conduit à la relation annoncée. $\square$

Lemme 2.2 *Si u est une solution strictement positive de (5), on a*

$$\int_{S^1} u_x^2 (-\lambda + u^{q-1}) \leq 0. \quad (8)$$

DÉMONSTRATION : On divise (5) par u et on multiplie par u_x^2 :

$$\int_{S^1} \left(\frac{u_{xx}}{u} u_x^2 - \lambda u_x^2 + u^{q-1} u_x^2 \right) = 0$$

Transformons le premier terme en remarquant que $u_{xx} u_x^2$ est la dérivée de $\frac{1}{3} u_x^3$; en intégrant par parties on a :

$$3 \int_{S^1} \left(\frac{u_{xx}}{u} \right) (u_x)^2 = \int_{S^1} \frac{(u_x)^4}{u^2}.$$

On obtient alors la relation annoncée ; on retrouve ainsi que pour $\lambda < 0$, il n'y a pas de solution strictement positive de (5).

En multipliant (8) par q et en ajoutant (6), on a

$$\int_{S^1} (\lambda + \lambda_2 - q\lambda) u_x^2 \leq 0.$$

Donc, pour $(q-1)\lambda < \lambda_2$, on a $u_x = 0$ et $u(x) = \mu$. Pour $(q-1)\lambda = \lambda_2$, on obtient en remplaçant dans (6) et (8)

$$\lambda_2 \int_{S^1} u_x^2 = \int_{S^1} u_{xx}^2 + \frac{q}{3} \int_{S^1} \frac{u_x^4}{u^2}$$

ce qui contredit (7) si u est non constante. On a donc montré le

Théorème 2 : *Pour $(q-1)\lambda \leq \lambda_2$, la seule solution strictement positive de (5) est la solution constante.*

REMARQUES :

1. Ceci complète un résultat connu dans le cas d'une variété Riemannienne [3]
2. Les estimations (6) et (8) sont assez fines. En effet, en divisant (5) par u , on a :

$$\int_{S^1} (-\lambda + u^{q-1}) \leq 0$$

En prenant simplement la moyenne de (5)

$$\int_{S^1} u(-\lambda + u^{q-1}) = 0$$

Enfin on peut obtenir de façon similaire la relation

$$\int_{S^1} u^2(-\lambda + u^{q-1}) \geq 0$$

en multipliant (5) par u et en intégrant.

2.2 Cas d'une variété quelconque

Proposition 2.3 *Soit M une variété riemannienne compacte, sans bord. Toute solution u de*

$$-\Delta_M u + \lambda u = u^q \tag{9}$$

sur M telle que

$$q\|u\|_{L^\infty(M)}^{q-1} \leq \lambda_2 + \lambda$$

est constante.

DÉMONSTRATION : En faisant la moyenne sur M de (9) on obtient

$$\lambda \bar{u} = \overline{u^q}$$

et par différence avec (9), en multipliant par $(u - \bar{u})$, on a

$$\int |\nabla(u - \bar{u})|^2 + \lambda \int (u - \bar{u})^2 = \int (u^q - \bar{u}^q)(u - \bar{u}) \quad (10)$$

$$= \int (u^q - \bar{u}^q)(u - \bar{u}) \quad (11)$$

$$= q \int |\xi u + (1 - \xi)\bar{u}|^{q-1}(u - \bar{u})^2 \quad (12)$$

d'où

$$(\lambda_2 + \lambda) \int (u - \bar{u})^2 \leq \int |\xi u + (1 - \xi)\bar{u}|^{q-1}(u - \bar{u})^2 \quad (13)$$

$$\leq q \|u\|_{L^\infty(M)}^{q-1} \int (u - \bar{u})^2 \quad (14)$$

l'inégalité étant stricte, si u n'est pas constante. $\square$

On peut généraliser ces résultats à une variété produit. Soient M et N deux variétés riemanniennes compactes sans bord, munies de métriques g et h ; on munit $M \times N$ munie de la métrique produit $g \otimes h$. Pour une fonction numérique $u = u(x, y)$ définie sur $M \times N$, on a, c.f. [2] : $\Delta_{M \times N} u(x, y) = \Delta_M u(x, y) + \Delta_N u(x, y)$.

Soit l'équation

$$\Delta_{M \times N} u - \lambda u + u^q = 0 \quad (15)$$

On notera $\bar{u}^M$ et $\bar{u}^N$ les moyennes de u respectivement sur M et N , $\lambda_{2,M}$ et $\lambda_{2,N}$ les premières valeurs propres non nulles correspondantes. En prenant la moyenne de (15) sur N , on obtient

$$-\Delta_M \bar{u}^N + \lambda \bar{u}^N = (\bar{u}^N)^q + \bar{u}^{\bar{u}^N} - (\bar{u}^N)^q.$$

En faisant la différence avec (15) et multipliant par $(\bar{u}^N - u)$ on aboutit à

$$\begin{aligned} \int_N |\nabla_N(\bar{u}^N - u)|^2 + \lambda \int_N (\bar{u}^N - u)^2 = \\ \int_N q |\xi \bar{u}^N + (1 - \xi)u|^{q-1}(\bar{u}^N - u)^2 - (\Delta_M \bar{u}^N + \Delta_M u)(\bar{u} - u). \end{aligned} \quad (16)$$

D'où

$$-\int_N \Delta_M(\bar{u}^N - u)(\bar{u}^N - u) + (\lambda_{2,N} + \lambda) \int_N (\bar{u}^N - u)^2 \leq q \|u\|_{\infty}^{q-1} \int_N (\bar{u}^N - u)^2.$$

Or

$$\int_{\mathbb{N}} w(x, y) \Delta_{\mathbb{M}} w(x, y) dy = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{M}} \left(\int_{\mathbb{N}} w^2(x, y) dy \right) - \int_{\mathbb{N}} |\nabla_{\mathbb{M}} w(x, y)|^2 dy$$

d'où

$$\frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{M}} \left(\int_{\mathbb{N}} |\bar{u}^{\mathbb{N}}(x) - u(x, y)|^2 dy \right) \geq (\lambda_{2,\mathbb{N}} + \lambda - q|u|_{\infty}^{q-1}) \int_{\mathbb{N}} |\bar{u}^{\mathbb{N}}(x) - u(x, y)|^2 dy.$$

Si

$$\lambda_{2,\mathbb{N}} + \lambda \geq q\|u\|_{\infty}^{q-1}$$

la fonction $\varrho : x \mapsto \int_{\mathbb{N}} |\bar{u}^{\mathbb{N}}(x) - u(x, y)|^2 dy$ est sous-harmonique positive, donc constante par rapport à x puisque $\mathbb{M}$ est compacte. S'il existe un point x_0 tel que $\bar{u}^{\mathbb{N}}(x_0) \neq u(x_0, y)$ pour un certain y , ϱ n'est pas nulle, et nécessairement $\lambda_{2,\mathbb{N}} + \lambda = q\|u\|_{\infty}^{q-1}$. En reportant dans (16) on obtient

$$\int_{\mathbb{N}} |\nabla_{\mathbb{N}}(\bar{u}^{\mathbb{N}} - u)|^2 < \varrho \lambda_{2,\mathbb{N}}$$

ce qui contredit la définition de $\lambda_{2,\mathbb{N}}$: ϱ est donc nulle. On peut évidemment faire un raisonnement semblable pour $\bar{u}^{\mathbb{M}}$. Finalement on a démontré :

Proposition 2.4 *Soit u une solution de (15). On a*

$$\begin{cases} q\|u\|_{\infty}^{q-1} \leq \lambda_{2,\mathbb{N}} + \lambda & \implies u(x, y) = \bar{u}^{\mathbb{N}}(x) \\ q\|u\|_{\infty}^{q-1} \leq \lambda_{2,\mathbb{M}} + \lambda & \implies u(x, y) = \bar{u}^{\mathbb{M}}(y) \\ q\|u\|_{\infty}^{q-1} \leq \min(\lambda_{2,\mathbb{M}}, \lambda_{2,\mathbb{N}}) + \lambda & \implies u(x, y) = C^{te} \end{cases}$$

3 Propriétés de moyenne

3.1 Les solutions homogènes

Intéressons-nous aux solutions homogènes du problème, c'est-à-dire les solutions de (1) indépendantes de x . Elles vérifient

$$u_{tt} - \lambda u + u^q = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[. \quad (17)$$

Lemme 3.1 *Soit u une solution positive bornée de (17). Alors u ne peut rester supérieure à $\mu = \lambda^{1/(q-1)}$ pour tout t .*

DÉMONSTRATION : Par l'absurde, supposons $u(t) > \mu$ pour tout t . La fonction u est convexe, la dérivée u' est monotone décroissante et admet une limite qui ne peut être que nulle lorsque t tend vers l'infini, sinon u ne serait ni positive ni bornée. Intégrons (17) entre 0 et T

$$\int_0^T (\lambda u - u^q) dt = u'(T) - u'(0)$$

or lorsque t tend vers l'infini, le terme de droite est borné, alors que l'intégrale tend vers l'infini à cause de la concavité de u ; d'où la contradiction. $\square$

On a immédiatement :

Lemme 3.2 : *Soit u une solution positive de (17) telle que $u(0) = \mu$ et $u'(0) < 0$. Soit u décroît vers 0 lorsque t tend vers l'infini, soit u présente un minimum et il existe (au moins) un instant t_1 tel que $u(t_1) = \mu$.*

Soit $G(r) = -\frac{1}{2}\lambda r^2 + \frac{r^{q+1}}{q+1}$, une primitive de $r \mapsto \lambda r - r^q$. En multipliant (17) par u' et en intégrant entre 0 et t , on fait apparaître l'énergie d'une solution u

$$\frac{1}{2}u'^2(t) + G(u(t)) = C^{te}$$

On en déduit immédiatement que si t_1 et t_2 sont deux instants consécutifs tels que $u(t_1) = u(t_2) = \mu$, alors $u'(t_1) = -u'(t_2)$.

En rassemblant les résultats précédents, on a donc montré

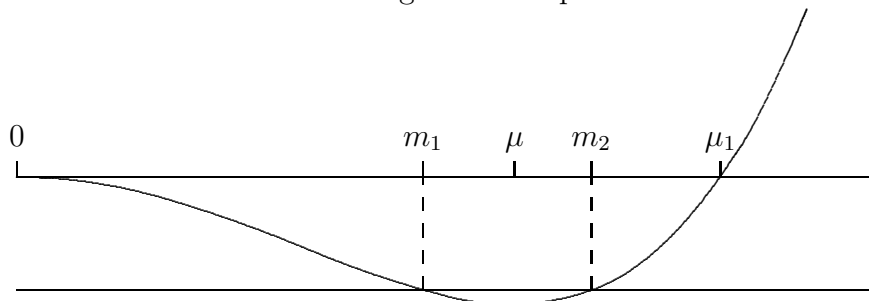
Proposition 3.3 *Les solutions positives du problème (17), mise à part la solution tendant vers 0, oscillent périodiquement autour de la valeur μ .*

Proposition 3.4 *Soit u une solution positive de (17). On a alors*

$$\forall t > 0 \quad u(t) \leq \mu_1 = \left(\frac{q+1}{2} \lambda \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (18)$$

DÉMONSTRATION : Dans le cas où u est périodique, considérons deux instants t_1 et t_2 où u présente respectivement un maximum m_2 et un minimum m_1 ; la relation d'énergie conduit à l'égalité entre $G(m_1)$ et $G(m_2)$.

Figure 1: Graphe de G



L'étude du graphe de G montre que m_2 est compris entre μ et le premier zéro de G qui est justement μ_1 . Si u n'est pas périodique (et donc tend vers 0), en faisant tendre t_2 vers l'infini dans la relation d'énergie on obtient de même $G(u(0)) < 0$. $\square$

Figure 2: Plan de Phase pour (17) avec $q = 3$.

REMARQUE : Dans le cas particulier $q = 3$, ainsi que pour $q = 2$, on peut obtenir des expressions explicites des solutions homogènes à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi, c.f. l'exemple de la section 5.4.

3.2 Les solutions positives quelconques

La fonction $g(r) = -\lambda r + r^q$ est une fonction convexe car $q > 1$. En utilisant l'inégalité de Jensen

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathbf{M})} \int_{\mathbf{M}} g(u) \geq g(\bar{u})$$

on obtient, en prenant la moyenne de (1),

$$0 \geq \bar{u}_{tt} + g(\bar{u}) = \bar{u}_{tt} - \lambda \bar{u} + \bar{u}^q \quad (19)$$

Lemme 3.5 *Il existe au moins un instant t_0 où $\bar{u}(t_0) < \mu$.*

DÉMONSTRATION : Supposons que $\bar{u}(t)$ soit toujours supérieur à μ , alors $g(\bar{u})$ est positif et donc $\bar{u}_{tt} \leq 0$; $\bar{u}_t$ est donc une fonction décroissante. Si $\bar{u}_t$ prend des valeurs strictement négatives, $\bar{u}$ ne peut rester supérieure à μ quelque soit t . La fonction $\bar{u}_t$ est décroissante minorée par 0 ; d'une part $\bar{u}$ est croissante, d'autre part $\bar{u}_t$ possède une limite ℓ . D'après le critère de Cauchy, pour ε fixé il existe T tel que pour $t_1 < t_2$ supérieurs à T on ait

$$0 < \bar{u}_t(t_1) - \bar{u}_t(t_2) < \varepsilon \quad (20)$$

Si on intègre (19) entre t_1 et t_2 , on obtient

$$0 \geq \int_{t_1}^{t_2} \bar{u}_{tt} dt + \int_{t_1}^{t_2} g(\bar{u}) dt$$

La première intégrale peut être rendue inférieure à ε d'après (20), alors que la deuxième est toujours positive puisque $g(\bar{u})$ est toujours positif et croît avec $\bar{u}$. $\square$

Proposition 3.6 : *On a*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(t) \leq \left(\lambda \frac{q+1}{2} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

DÉMONSTRATION : Pour t assez grand $\bar{u}(t)$ devient inférieur à μ d'après le lemme précédent. Si $\bar{u}$ reste ensuite inférieur à μ , il n'y a rien à ajouter ; sinon on peut trouver deux instants t_1 et t_2 tels que $\bar{u}_t(t_1) = \bar{u}_t(t_2) = 0$ avec $\bar{u}_t(t)$ positif sur $[t_1, t_2]$. On multiplie (19) par $\bar{u}_t$ et on intègre entre t_1 et t_2 ; on obtient avec les notations du paragraphe 3.1

$$G(\bar{u}(t_2)) \leq G(\bar{u}(t_1))$$

Sachant que G présente un minimum pour la valeur μ et que par construction $G(\bar{u}(t_1))$ est négatif, on aboutit à la même conclusion : $\bar{u}(t_2)$ est compris entre μ et μ_1 . $\square$

4 Quelques résultats généraux

4.1 Intégrales premières

Supposons qu'il existe sur M un champ de Killing $x \mapsto X(x)$; soit $t \mapsto e^{tX}$ le groupe local d'isométries et L_X la dérivée covariante associés [1] :

$$\frac{d}{dt}u(e^{tX}x) \Big|_{t=0} = (L_X u)(x)$$

On a alors :

Proposition 4.1 *Pour toute solution u de (1), on a*

$$\int_M u_t L_X u = C^{te}$$

DÉMONSTRATION : On multiplie (1) par $L_X u$ et on intègre sur M :

$$\int_M u_{tt} L_X u + \int_M \Delta_M L_X u + \int_M (-\lambda u + u^q) L_X u = 0 \quad (21)$$

Puisque X est un champ de Killing, on a :

$$\int_M (-\lambda u + u^q) L_X u = \int_M \left(-\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{q+1} |u|^{q+1} \right) \quad (22)$$

$$\int_M \Delta_M u L_X u = -\frac{1}{2} \int_M L_X |\nabla u|^2 \quad (23)$$

Or pour toute fonction ω sur M on a :

$$\int_M L_X \omega = 0.$$

Il reste donc, dans (21),

$$0 = \int_M u_{tt} L_X u = \frac{d}{dt} \int_M u_t L_X u + \int_M u_t L_X u_t$$

La dernière intégrale est nulle pour les mêmes raisons ; la quantité considérée est donc constante, puisque sa dérivée est nulle. $\square$

Par exemple, pour $M = S^{n-1}$, les champs de Killing sont engendrés par des matrices A antisymétriques ; dans le cas particulier de S^1 , on peut prendre $L_X = d/dx$, ce qui conduit à :

$$\int_{S^1} u_t u_x = C^{te}.$$

Proposition 4.2 *Pour toute solution u de (1) sur $M \times [0, +\infty[$, on a*

$$E(u) = \int_M (u_t^2 - |\nabla u|^2) + \int_M (-\lambda u^2 + 2 \frac{u^{q+1}}{q+1}) = C^{te}.$$

On notera $J(u) = \frac{1}{\text{vol}(M)} E(u)$ l'énergie normalisée.

DÉMONSTRATION : On multiplie (1) par u_t puis on intègre sur M en remarquant que

$$\begin{aligned} \int_M u_t \Delta_M u &= - \int_M (\nabla u) \cdot (\nabla u_t) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que la dérivée de la quantité considérée est nulle. $\square$

4.2 Homogénéisation

Proposition 4.3 *Soit une solution positive de (1) telle qu'il existe un réel $m_0 < \mu$ (μ étant toujours égal à $\lambda^{1/(q-1)}$) vérifiant*

$$\forall (x, t) \in M \times [0, +\infty[\quad u(x, t) \leq m_0,$$

alors $u(x, t)$ tend exponentiellement vers 0 uniformément par rapport à x lorsque $t \rightarrow +\infty$.

DÉMONSTRATION : On peut démontrer ce résultat à l'aide du principe du maximum. Considérons l'opérateur $L : u \mapsto u_{tt} + \Delta_M u - \lambda u$; pour $B > 0$ on pose

$$v(x, t) = m_0 e^{-t\sqrt{\lambda}} + B e^{t\sqrt{\lambda}} + \frac{m_0^q}{\lambda} \quad (24)$$

On a :

$$L(v) = -m_0^q < -u^q = L(u) \quad (25)$$

Le principe du maximum montre que : $\forall B > 0 \quad v(x, t) > u(x, t)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons t_0 pour que

$$m_0 e^{-t_0 \sqrt{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

En faisant tendre B vers 0, on aura

$$\forall (x, t) \in M \times [t_0, +\infty[\quad u(x, t) < \frac{m_0^q}{\lambda} + \varepsilon \quad (26)$$

Puisque $m_0 < \mu$, alors $m_1 = \frac{m_0^q}{\lambda} \leq m_0$; on peut réitérer le procédé en remplaçant m_0 par m_1 sur $[t_0, +\infty[$, d'où la convergence vers 0 de $u(x, t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. $\square$

REMARQUE : Si on remplace la non-linéarité u^q par $u|u|^{q-1}$, on montre facilement la décroissance exponentielle pour une solution u vérifiant $|u(x, t)| < m_0$.

Théorème 3 *Si $\forall (x, t) \quad u(x, t) < (\frac{\lambda + \lambda_2}{q})^{\frac{1}{q-1}}$, alors les solutions positives de (1) s'homogénéisent.*

DÉMONSTRATION :

Lemme 4.4 *Soit u une solution positive de (1). On pose*

$$w(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{M}} |\nabla u|^2$$

Il existe une constante ℓ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = \ell$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} w'(t) = 0$.

DÉMONSTRATION : On a

$$w'(t) = \int_{\mathbf{M}} (\nabla u) \cdot (\nabla u_t) \quad (27)$$

$$w''(t) = \int_{\mathbf{M}} (|\nabla u_t|^2 - u_{tt} \Delta_{\mathbf{M}} u) \quad (28)$$

en utilisant la formule de Green. On obtient alors en intégrant entre 0 et T

$$\int_{\mathbf{M}} \int_0^T |\nabla u_t|^2 = \int_{\mathbf{M}} \int_0^T u_{tt} \Delta_{\mathbf{M}} u + w'(T) - w'(0) \quad (29)$$

avec

$$\int_{\mathbf{M}} \int_0^T u_{tt} \Delta_{\mathbf{M}} u = - \int_{\mathbf{M}} \int_0^T ((\Delta_{\mathbf{M}} u)^2 + \lambda |\nabla u|^2 - qu^{q-1} |\nabla u|^2) \quad (30)$$

par définition de λ_2 on a

$$\int_{\mathbf{M}} (\Delta_{\mathbf{M}} u)^2 \geq \lambda_2 \int_{\mathbf{M}} |\nabla u|^2 \quad (31)$$

en utilisant la décomposition de Fourier ; on en déduit

$$\int_{\mathbf{M}} ((\Delta_{\mathbf{M}} u)^2 + \lambda |\nabla u|^2 - qu^{q-1} |\nabla u|^2) \geq \int_{\mathbf{M}} |\nabla u|^2 (\lambda + 1 - qu^{q-1}) \quad (32)$$

Par hypothèse, l'intégrale de droite est positive ou nulle, donc

$$\int_{\mathbf{M}} \int_0^T u_{tt} \Delta_{\mathbf{M}} u \leq 0 \quad (33)$$

En reportant dans (29) on obtient

$$w'(T) - w'(0) \geq 0$$

w est donc une fonction convexe bornée à l'infini. $\square$

En écrivant la formule des accroissements finis entre $t = n$ et $t = n + 1$: il existe un réel t_n tel que

$$w'(n+1) - w'(n) = w''(t_n).$$

Il existe donc une suite croissante d'instants t_n tendant vers l'infini tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w''(t_n) = 0$.

La quantité $\int_M \Delta_M u(x, t_n) u_{tt}(x, t_n) dx$ possède une limite nulle d'après les relations (28) et (33). En reportant dans (32) et en utilisant (30), le terme de gauche tend vers 0, alors que celui de droite est positif ; on a donc montré $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_M \frac{1}{2} |\nabla u|^2 = 0$ car w admet une limite. $\square$

REMARQUE : L'énoncé précédent n'est significatif que si $\mu < (\frac{\lambda + \lambda_2}{q})^{\frac{1}{q-1}}$ (sinon il est contenu dans la Proposition 4.3), c'est-à-dire pour

$$\lambda < \frac{\lambda + \lambda_2}{q} \iff (q-1)\lambda < \lambda_2.$$

La condition $(q-1)\lambda > \lambda_2$ est justement suffisante pour l'apparition de solutions stationnaires positives non nulles et, dans le cas de S^1 , de "solitons".

4.3 Estimations a priori

On peut généraliser ce résultat à un domaine de la forme $\mathbb{R} \times M$; on note toujours $\bar{u}$ la moyenne sur M d'une fonction u .

Proposition 4.5 *Soit u une solution de (1) définie sur $\mathbb{R} \times M$. Si*

$$q \|u\|_{L^\infty}^{q-1} \leq \lambda_2 + \lambda \tag{34}$$

alors u est homogène, i.e. $u(x, t) = \bar{u}(t)$.

DÉMONSTRATION : Comme au paragraphe 2.2, on prend la moyenne sur M de (1), on fait la différence avec (1), on multiplie cette dernière par $(u - \bar{u})$ et on intègre sur M :

$$\int_M (u_{tt} - \bar{u}_{tt})(u - \bar{u}) \geq (\lambda + \lambda_2) \int_M (u - \bar{u})^2 - q \|u\|_{L^\infty}^{q-1} \int_M (u - \bar{u})^2 \tag{35}$$

En remarquant que

$$\int_{\mathbf{M}} (u_{tt} - \bar{u}_{tt})(u - \bar{u}) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2 - \int_{\mathbf{M}} (u_t - \bar{u}_t)^2$$

et tenant compte de la définition de λ_2 , puisque $u - \bar{u}$ est une fonction de moyenne nulle, on aboutit à

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2 \geq (-q\|u\|_{L^\infty}^{q-1} + \lambda_2 + \lambda) \int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2 + \int_{\mathbf{M}} (u_t - \bar{u}_t)^2 \quad (36)$$

Si $q\|u\|_{L^\infty}^{q-1} \leq \lambda_2 + \lambda$, la fonction $\int_{\mathbf{M}} (u - \bar{u})^2$ est convexe bornée, donc constante. Si cette constante est non nulle, alors $q\|u\|_{L^\infty}^{q-1} = \lambda_2 + \lambda$ et le même type de raisonnement qu'à la Proposition 2.4 permet de conclure. $\square$

On peut enfin montrer, toujours pour une variété riemannienne $\mathbf{M}$ compacte, sans bord :

Proposition 4.6 *Supposons $q < \frac{n+3}{n-1}$. Il existe une constante C dépendant de $\mathbf{M}$ et de q telle que pour toute solution positive, bornée, de (9) sur $\mathbf{M} \times \mathbb{R}$ on ait*

$$\|u\|_{L^\infty} < C\lambda^{\frac{1}{q-1}}$$

DÉMONSTRATION : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite λ_n associée à des solutions u_n telles que

$$C_n = \frac{\|u_n\|_{L^\infty}}{\lambda_n^{1/(q-1)}} \longrightarrow +\infty \quad (37)$$

Soit $(x_n, t_n) \in \mathbf{M}$ tel que $u_n(x_n, t_n) = (1 - 1/n)\|u_n\|_{L^\infty}$. Par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que les x_n tendent vers un certain $x_0 \in \mathbf{M}$. Trois cas sont alors à envisager :

(i) $\|u\|_{L^\infty}$ n'est pas bornée :

Quitte à extraire une sous-suite on peut donc supposer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u\|_{L^\infty} = +\infty$. Considérons une carte locale autour de x_0 . Dans cette carte locale, l'équation différentielle devient

$$u_{tt} + Lu - \lambda u + u^q = 0$$

où L est un opérateur elliptique auto-adjoint. Procédons comme dans [7] : soit $d > 0$ tel que la boule de centre x_0 et de rayon $2d$ soit incluse dans cette carte. On effectue une mise à l'échelle en posant

$$\epsilon_n^{\frac{-2}{q-1}} \|u_n\|_{L^\infty} = 1.$$

et

$$(\tilde{t}, \tilde{x}) = \left(\frac{t - t_n}{\epsilon_n}, \frac{x - x_n}{\epsilon_n} \right)$$

puis

$$v_n(\tilde{t}, \tilde{x}) = \epsilon_n^{\frac{-2}{q-1}} u(x, t)$$

D'après l'hypothèse, compte tenu de (37) $\epsilon_n \rightarrow +\infty$. Pour n assez grand, la fonction v_n est définie au moins sur une boule de centre 0 et de rayon $d\epsilon_n$, et vérifie :

$$0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{et} \quad v_n(0, 0) = 1 - 1/n$$

L'opérateur L_n , transformé de L dans la mise à l'échelle, est un opérateur elliptique dont la constante d'ellipticité est minorée par une quantité $\varrho > 0$ indépendante de n ; en outre la norme C^1 des coefficients de L_n est bornée indépendamment de n . La fonction v_n vérifie

$$v_{n tt} + L_n v_n + v_n^q - \lambda |v_n|_\infty^{1-q} v_n = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$v_{n tt} + L_n v_n + v_n^q - C_n^{1-q} v_n = 0. \quad (38)$$

Soit R tel que $B_R(0) \subset B_{d\epsilon_n}(0)$, et T donné. D'après la théorie de Schauder, on peut trouver des bornes uniformes pour $\|v_n\|_{W^{2,p}([-T, T] \times B_R(0))}$, puis pour $\|v_n\|_{C^{1,\beta}([-T, T] \times B_R(0))}$. On peut donc extraire une sous-suite v_{n_j} convergeant dans $W^{2,p} \cap C^{1,\beta}$ vers une fonction v telle que $v(0, 0) = 1$.

Les coefficients des opérateurs L_n ayant pour limite ceux de L lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que v est solution de

$$v_{tt} + Lv + v^q = 0 \quad (39)$$

sur $[-T, T] \times B_R(0)$. Il est facile de voir que v peut être étendue à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tout entier et qu'il y a convergence de v_n vers v sur tout compact. Il y a

contradiction : en effet pour $q < \frac{(n+1)+2}{(n+1)-2}$ toute solution positive bornée de $v_{tt} + Lv + v^q = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est nulle [8].

(ii) $\|u_n\|_{L^\infty}$ est bornée et ne tend pas vers 0

D'après (37), λ_n tend vers 0. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $\|u_n\|_{L^\infty}$ converge vers un réel $M_0 \neq 0$. Effectuons une simple mise à l'échelle $u_n = w_n \|u_n\|_{L^\infty}$ avec $w_n(t_n, x_n) = 1 - 1/n$. La fonction w_n est solution de

$$w_n tt + \Delta_M w_n + \|u_n\|_{L^\infty}^{q-1} w_n^q - \lambda_n w_n = 0$$

En utilisant le même argument que ci-dessus, il y a convergence sur tout compact de $\mathbb{R} \times M$ vers une fonction w solution de

$$w_{tt} + \Delta_M w + M_0 w^q = 0$$

Comme $M_0 \neq 0$ on obtient la même contradiction que ci-dessus, puisque $w(0, 0) = 1$.

(iii) $\|u_n\|_{L^\infty}$ tend vers 0

La suite (λ_n) tend encore vers 0. D'après la Propriété 4.5, pour n assez grand, les solutions de (1) sont homogènes et vérifient d'après (18),

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{q+1}{2}\right)^{1/(q-1)} \lambda^{1/(q-1)}$$

ce qui contredit $C_n \rightarrow +\infty$. □

4.4 Comportement asymptotique

Un point important pour caractériser le comportement asymptotique des solutions de (1) est la conservation de l'énergie (c.f. Proposition 4.2) : $J(u) = C^{te}$. Les solutions homogènes $\varphi(t)$ (indépendantes de x) de (1) sont solutions de (17) et sont entièrement classifiées par leur énergie σ :

$$\sigma = \varphi_t^2 - \lambda \varphi^2 + \frac{2}{q+1} \varphi^{q+1}$$

avec $0 \geq \sigma \geq J(\mu)$ dans le cas des solutions positives.

Pour $0 > \sigma \geq J(\mu)$, soit γ_σ l'orbite de (17) d'énergie σ et T_σ sa période.

Pour $\sigma = 0$, γ_0 désigne la courbe fermée réunion de $\{0\}$ et de l'orbite homoclinique connectant 0 à 0. (c.f. plan de phase à la section 3.1).

Théorème 4 *Soit u une solution de (1) définie sur $[0, +\infty[\times M$ vérifiant pour t assez grand :*

$$q|u|_{L^\infty}^{q-1} \leq \lambda + \lambda_2.$$

Alors

(i) On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - \bar{u}\|_{C^2(M)} = 0$$

De plus $0 \leq J(u)(t) \leq J(\mu_f)$.

(ii) Soit $\sigma = J(u)$. On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(u(t, \cdot), \gamma_\sigma) = 0$$

(iii) Pour $q|u|_\infty^{q-1} < \lambda + \lambda_2$ et $\sigma < 0$, soit φ une solution de (5) d'énergie σ . Il existe un déphasage τ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - \varphi(t + \tau)|_{C^2(M)} = 0$$

DÉMONSTRATION : Le (i) a été démontré à la Propriété 4.5.

Pour le (ii), on procède comme dans [9, Paragraphe 4.1].

Pour le (iii), en posant $\lambda + \lambda_2 - q\|u\|_\infty^{q-1} = \delta > 0$, la relation (36) montre que $\varrho = \int_M (u - \bar{u})^2$ vérifie :

$$\varrho'' - 2\delta\varrho \geq 0$$

d'où la décroissance exponentielle ; on conclut comme dans [9]. □

5 Existence de solutions

5.1 Solutions tendant vers 0

Soit $H = L^2(M)$; rappelons les résultats suivants Brézis , Véron [5], [10]

Proposition 5.1 Soit A un opérateur maximal monotone sur H , tel que $0 \in R(A)$. Pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction unique $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$ telle que $u_t \in L^2(\mathbb{R}^+; H)$, $u_{tt} \in L^2(\mathbb{R}^+; H)$, $u(t) \in D(A)$ p.p sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{tt} \in Au & \text{p.p sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus, pour chaque $t \geq 0$, l'application $u_0 \mapsto u(t)$ définit un semi-groupe $S(t)$ de contractions de $\overline{D(A)}$ dans $\overline{D(A)}$. Enfin, si on considère le problème

$$\begin{cases} u_{tt} = Au + f & \text{p.p sur } \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (40)$$

Proposition 5.2 Pour tout $u_0 \in D(A)$, pour tout $f \in BV(0, +\infty; H)$ il existe une unique solution forte de (40) qui est donnée par

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s) \int_s^{+\infty} S(\tau-s) f(\tau) d\tau ds. \quad (41)$$

Soit $u_0 \in H^1(M)$ positive. Considérons la suite de fonctions y_n définies par le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} y_0 &= 0 \\ y_{ntt} + \Delta_M y_n &= \lambda y_n - (y_{n-1})^q \\ y_n(0, x) &= u_0(x) \end{cases} \quad (42)$$

Proposition 5.3 Les fonctions y_n décroissent exponentiellement en norme $C^1(M)$ vers 0 à l'infini.

DÉMONSTRATION : Pour y_1 , on a explicitement en multipliant (42) par y_1 et en intégrant sur M :

$$\int_M y_1 y_{1tt} + \int_M y_1 \Delta_M y_1 - \lambda \int_M y_1^2 = 0$$

ce qui donne, en posant

$$\varphi(t) = \left(\int_M y_1^2 \right)^{1/2}$$

la relation

$$\varphi''(t) - \lambda \varphi(t) \geq 0$$

dans $\mathcal{D}'$. On en déduit

$$\varphi(t) \leq e^{-t\sqrt{\lambda}}\varphi(0).$$

En utilisant la théorie de la régularité des équations elliptiques, on montre comme dans [9] que y_1 est continue sur $M \times]0, +\infty[$ et décroît exponentiellement en norme C^1 .

Proposition 5.4 *Les fonctions y_n sont positives.*

DÉMONSTRATION : Raisonnons par l'absurde et supposons que y_n devienne négative ; comme y_n tend vers 0 à l'infini elle présentera alors un minimum strictement négatif en un point où y_{tt} et y_{xx} seront positives, alors que $\lambda y_n - (y_{n-1})^q$ sera négatif. $\square$

Proposition 5.5 *La suite des fonctions (y_n) est croissante.*

DÉMONSTRATION : D'après la Proposition précédente, $y_0 \leq y_1$. Procédons par récurrence ; soit $L = \Delta_M - \lambda \text{Id}$ et $\eta > 0$ fixé. En posant $Y = y_n - \eta$, on a :

$$LY = -(y_{n-1})^2 + \lambda\eta \quad (43)$$

$$Ly_{n+1} = -(y_n)^q \quad (44)$$

d'où par différence :

$$L(y_{n+1} - Y) = (y_{n-1})^q - (y_n)^q - \lambda\eta$$

Par hypothèse de récurrence le deuxième membre est négatif. En $t = 0$ on a : $y_{n+1} > Y$. Comme y_n tend vers 0 à l'infini, on peut trouver un instant T où Y est négative : le principe du maximum entraîne : $y_{n+1} > Y$ sur $[0, T] \times M$. Cette relation reste vraie sur $[0, +\infty[\times M$; en faisant tendre η vers 0 on aboutit à la conclusion. $\square$

Proposition 5.6 *Soit $u_0 \in H^1(M)$ vérifiant*

$$0 \leq u_0(x) < \left(\lambda \frac{q+1}{2}\right)^{1/(q-1)}.$$

Il existe une solution positive du problème (1), avec $u(0, x) = u_0(x)$, tendant vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION : La valeur $\left(\lambda \frac{q+1}{2}\right)^{1/(q-1)}$ correspond au maximum des solutions homogènes de (1), c'est-à-dire des solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$y'' - \lambda y + y^p = 0 \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[\quad (45)$$

c.f. paragraphe 3.1. Soit alors $V(t)$ une solution de (45) telle que $V(0) > u(0, x)$ et posons $v(x, t) = V(t)$. Le principe du maximum montre que y_0 est inférieure à v ; d'autre part $v - y_n$ vérifie

$$L(v - y_n) = (y_{n-1})^q - v^q$$

Par récurrence on montre que $y_n(x, t) < v(x, t)$. On peut alors considérer la limite de la suite (y_n) : c'est la solution cherchée.

Cette solution est inférieure à toutes les solutions homogènes V telles que $V(0)$ soit assez grand, et donc à leur limite inférieure qui est justement la solution décroissant vers 0. $\square$

5.2 Peut-on généraliser ?

Cette méthode ne peut, hélas, se généraliser à des solutions ne tendant pas vers 0. En effet, dans le cas $q = 2$, considérons le problème linéarisé autour de la solution $u(x, t) = \mu = \lambda$; posons $u(x, t) = \mu + v(x, t)$, on vérifie aisément que v satisfait à

$$v_{tt} + \Delta_M v + \lambda v = -v^2 \quad (46)$$

Regardons le schéma itératif appliqué à (46) ;

$$\begin{cases} v_0 &= 0 \\ v_{n tt} + \Delta_M v_n &= -\lambda v_{n-1} - (v_{n-1})^q \\ v_n(0, x) &= u_0(x) \end{cases}$$

L'opérateur intervenant est encore accréatif, et on peut lui associer un semi-groupe de contractions. Par contre les fonctions v_n ne sont pas nécessairement positives, ni ordonnées.

La Proposition (5.6) montre l'existence de solutions "proches" de la solution homogène tendant vers 0. Il paraît naturel de chercher s'il existe des solutions proches des solutions homogènes périodiques.

Nous nous limiterons, dans tout ce qui suit, à l'étude du cas où $M = S^1$.

Soit y_0 une solution, strictement positive, de

$$y_0'' - \lambda y_0 + y_0^q = 0$$

qui ne tend pas vers 0 ; c'est une fonction périodique, dont on notera la période T . Nous allons montrer l'existence de solutions u de (1) vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - y_0(t)| = 0$ uniformément par rapport à x , par une méthode d'inversion locale. L'avantage de cette méthode est de pouvoir s'appliquer dans le cas d'un opérateur non local comme au paragraphe 6.3.

Nous commençons par quelques rappels sur les équations à coefficients périodiques, qui interviennent lors de l'étude du problème (1) linéarisé autour de y_0 .

5.3 Théorie de Floquet

Proposition 5.7 *Considérons l'équation*

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = 0 \quad (47)$$

où a_1 et a_2 sont T -périodiques. Il existe deux solutions indépendantes ψ_1 et ψ_2 de (47) telles que

1. Soit

$$\psi_1(t) = e^{m_1 t} p_1(t) \quad \psi_2(t) = e^{m_2 t} p_2(t) \quad (48)$$

où m_1 et m_2 sont des constantes (éventuellement complexes) et p_1 et p_2 sont T -périodiques

2. Soit

$$\psi_1(t) = e^{m t} p_1(t) \quad \psi_2(t) = e^{m t} (t p_1(t) + p_2(t)) \quad (49)$$

où m est une constante (éventuellement complexe) et p_1 et p_2 sont T -périodiques

Les constantes m_i sont appelées exposants caractéristiques de l'équation ; si on définit les valeurs caractéristiques $\rho_i = e^{Tm_i}$ elles sont solutions de

$$\rho^2 - D\rho + \exp\left(-\int_0^T a_1(\tau)d\tau\right) = 0 \quad (50)$$

où D est une constante appelée discriminant de l'équation.

Plus précisément pour une équation de la forme

$$y''(t) + (\eta + q(t))y(t) = 0 \quad (51)$$

(équation de HILL) où q est continue et T -périodique, on définit, pour chaque valeur de η , le discriminant $D(\eta)$ correspondant. On a alors

Proposition 5.8 *Il existe deux suites de réels λ_n et μ_n tendant vers $+\infty$*

1. *qui apparaissent dans l'ordre*

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

2. *dans les intervalles $[\lambda_{2m}, \mu_{2m}]$, $D(\eta)$ décroît de 2 à -2*

3. *dans les intervalles $[\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1}]$, $D(\eta)$ croît de -2 à 2*

4. *dans les intervalles $]\mu_{2m}, \mu_{2m+1}[$, $D(\eta) < -2$*

5. *dans les intervalles $] -\infty, \lambda_0[$ et $]\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}[$, $D(\eta) > 2$*

Définitions 1 : Si η est égal à l'un des λ_i ou des μ_i alors $|D(\eta)| = 2$, (50) possède une racine double et les solutions sont données par (49). Si $|D(\eta)| > 2$, on dira que η appartient à une *zone d'instabilité*, les solutions étant données par (48) avec m_1 et m_2 réels opposés. Si $|D(\eta)| < 2$ on dira que η appartient à une *zone de stabilité*, les solutions étant données par (48) avec m_1 et m_2 imaginaires conjugués, les solutions fondamentales sont des produits de fonctions périodiques.

5.4 Préliminaires

Cherchons une solution de (1) sur $\mathbb{R}^+ \times S^1$ sous la forme $u(x, t) = y_0(t) + w(x, t)$. On a alors

$$w_{tt} + w_{xx} + (qy_0^{q-1} - \lambda)w + Q(w) = 0.$$

avec

$$Q = (y_0 + w)^q - y_0^q - qy_0^{q-1}w$$

Le problème linéarisé correspondant est :

$$v''(t, x) + v_{xx}(t, x) + (qy_0^{q-1}(t) - \lambda)v(t, x) = 0 \quad (52)$$

En écrivant la décomposition de Fourier de v sous la forme

$$v(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$$

on voit que (52) devient

$$c_n''(t) + (qy_0^{q-1}(t) - \lambda - n^2)c_n(t) = 0 \quad (53)$$

Chacune de ces équations est une équation de Hill, avec η égal à $-\lambda - n^2 = \eta_n$.

Il existe un entier n_0 et un réel $\sigma_1 > 0$ tels que

$$\forall n > n_0 \quad \forall t > 0 \quad (qy_0^{q-1}(t) - \lambda - n^2) < -\sigma_1^2 < 0. \quad (54)$$

Pour $|n| > n_0$, η_n est dans la première zone d'instabilité (au sens des Définitions 1) $] -\infty, \lambda_0[$ et les solutions correspondantes de (53) sont de type exponentiel. Pour $|n| \leq n_0$, la forme générale des solutions de (53) est déterminée par le fait que η_n appartient ou non à une zone d'instabilité. Lorsque η_n est dans une zone d'instabilité, on notera $m_{2,n} < 0 < m_{1,n}$ les exposants caractéristiques de (53). Soit σ un réel tel que

$$0 < \sigma < \min(\sigma_1, \inf\{m_{1,n} \mid n \leq n_0 \text{ et } \eta_n \text{ instable}\})$$

Soit E_1 le sous-espace de $L^2(S^1)$ engendré par les e^{inx} correspondant aux n tels que (53) soit stable ou périodique (au sens des Définitions 1), et E_2 le sous-espace de $L^2(S^1)$ engendré par les e^{inx} correspondant aux n tels

que (53) soit instable ; on a alors une décomposition en somme directe de $L^2(S^1) = E_1 \oplus E_2$ associée à des projecteurs p_1 et p_2 . En outre E_1 est de dimension finie inférieure à n_0 à cause de (54).

REMARQUE 1 : Il n'est pas certain que les n pour lesquels (53) est stable forment un intervalle de $\mathbb{Z}$.

REMARQUE 2 : On a toujours $D(\eta_0) = D(-\lambda) = 2$ puisque l'équation (53) possède, pour $n = 0$, la solution périodique $y'_0(t)$.

REMARQUE 3 : Il est impossible que E_1 soit vide, puisqu'il contient les constantes.

EXEMPLE : Lorsque $q = 3$, les solutions homogènes de (1) se mettent sous la forme

$$y_0(t) = A \operatorname{dn}(\alpha t, k)$$

où dn désigne une des fonctions elliptiques de Jacobi (selon les notations de [11]), avec

$$\begin{aligned} A^2 &= 2\alpha^2 \\ k^2 &= 2\left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right). \end{aligned}$$

La période de y_0 est donnée par $T = 2K/\alpha$ avec K défini par l'intégrale elliptique

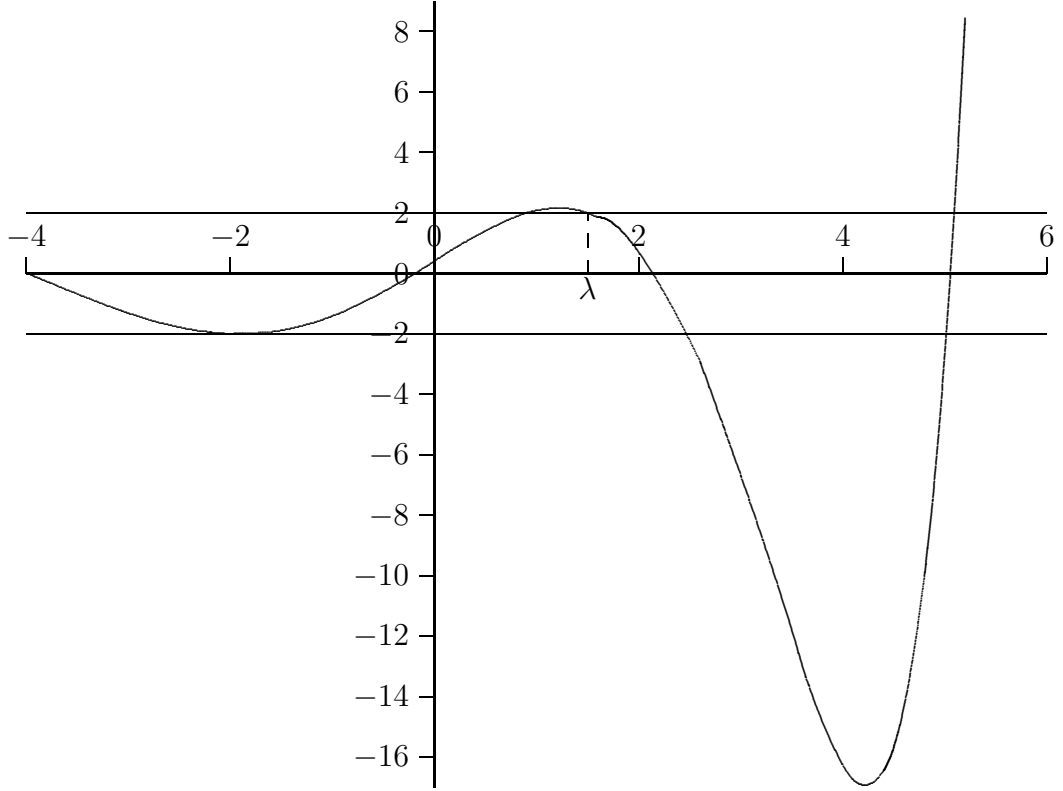
$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Pour fixer les idées, choisissons $A = 1.25\sqrt{\lambda}$, ce qui donne $k = 0.72$. Le tableau ci-dessous donne pour diverses valeurs de λ , les valeurs de $D(\eta_n)$

λ	η_0	η_1	η_2	η_3
0.25	2	1026		
1	2	-6.52	1026	
1.75	2	-1.13	-5.77	5807
2.5	2	0.28	-15.59	487
7	2	1.62	-1.13	-11.10

On peut remarquer que si λ est assez petit , $\dim(E_1) = 1$.

Figure 3: Graphe de $D(\eta)$



La figure ci-dessus représente, pour $\lambda = 1.5$, le tracé de $D(\eta)$ en fonction de η .

Le tableau ci-dessous indique pour diverses valeurs de λ , les valeurs correspondantes de $D(\eta_1)$ pour diverses valeurs de l'amplitude de y_0 , à savoir $A = c\sqrt{\lambda}$ avec $c = 1.1$, $c = 1.25$ et $c = 1.4$

λ	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$c = 1.1$	-2.89	-2.92	-2.29	-1.63	-1.059
$c = 1.25$	-16.24	-13.34	-10.52	-8.26	-6.52
$c = 1.4$	-1310	-883	-626	-465	

Posons $\bar{\Omega} = S^1 \times [0, +\infty[$ et pour σ défini ci-dessus, soient les espaces

suivants, munis des normes naturelles,

$$\begin{aligned} E_\sigma^{2+\alpha} &= \{u \mid e^{\sigma t}u \in W_\infty^{2+\alpha}(\bar{\Omega})\} & |u| &= \|e^{-\sigma t}u\| \\ E_\sigma^\alpha &= \{u \mid e^{\sigma t}u \in W_\infty^\alpha(\bar{\Omega})\} & |u| &= \|e^{\sigma t}u\| \end{aligned}$$

On montre facilement le

Lemme 5.9 *Munis des normes ainsi définies, $E_\sigma^{2+\alpha}$ et E_σ^α sont des espaces de Banach.*

5.5 Le problème linéarisé

Avant de poursuivre, il convient d'insister sur le fait que y_0 étant fixée (par son amplitude ou son énergie), les valeurs caractéristiques, les exposants caractéristiques, les projecteurs p_1 et p_2 sont parfaitement déterminés, ainsi que les intervalles de stabilité ou d'instabilité des équations (53)

Soit $F_2 = E_2 \cap C^{2+\alpha}(S^1)$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi : E_\sigma^{2+\alpha} &\longrightarrow E_\sigma^\alpha \times F_2 \\ u &\longmapsto (u'' + u_{xx} + (qy_0^{q-1} - \lambda)u(t), p_2(u(0, \cdot))) \end{aligned}$$

Théorème 5 *L'application Ψ réalise un isomorphisme d'espace de Banach.*

DÉMONSTRATION : Il est clair que Ψ est bien définie. Soit $g \in E_\sigma^\alpha$, considérons

$$v''(t, x) + v_{xx}(t, x) + (qy_0^{q-1}(t) - \lambda)v(t, x) = g(t, x) \quad (55)$$

En décomposant

$$g(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n(t) e^{inx}$$

les équations satisfaites par les coefficients c_n de v sont donc

$$c_n''(t) + (qy_0^{q-1}(t) - \lambda - n^2)c_n(t) = \gamma_n \quad (56)$$

Comme $g \in E_\sigma^\alpha$, il existe une constante M_g telle que $\gamma_n < M_g e^{-\sigma t}$. Envisageons les trois possibilités :

(i) L'équation (56) est stable. Posons alors, en omettant les indices n ,

$$c(t) = \frac{\psi_1}{W} \int_t^\infty \psi_2(\tau) \gamma(\tau) d\tau - \frac{\psi_2}{W} \int_t^\infty \psi_1(\tau) \gamma(\tau) d\tau$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les solutions (bornées) de l'équation homogène associée et W le Wronskien de ces solutions (qui est constant puisqu'il n'y a pas d'amortissement).

On vérifie aisément qu'il existe une constante C telle que $c(t) < Ce^{-\sigma t}$.

(ii) L'équation (56) possède une solution périodique. On peut reprendre le calcul précédent, compte tenu de l'expression de ψ_1 et ψ_2 donnée dans (49).

(iii) L'équation est dans une zone d'instabilité. On prendra alors :

$$c(t) = C_2 \psi_2(t) + \frac{\psi_1}{W} \int_t^\infty \psi_2(\tau) \gamma(\tau) d\tau + \frac{\psi_2}{W} \int_0^t \psi_1(\tau) \gamma(\tau) d\tau$$

la constante C_2 étant déterminée par $c(0)$, c'est-à-dire par $p_2(u(0))$. On vérifie aisément qu'il existe une constante C telle que $c(t) < Ce^{-\sigma t}$,

Pour les n tels que $|n| > |n_0|$, on aura donc $|c_n(t)| \leq |c_n(0)|$ et aussi

$$\sum_{|n| > n_0} c_n^2(t) \leq \sum_{|n| > n_0} c_n^2(0)$$

ce qui montre que pour tout $t > 0$ on peut définir $p_2 v(\cdot, t)$ à l'aide de ses coefficients de Fourier, et donc aussi v .

La régularité de la solution ainsi construite découle de la théorie de la régularité des solutions d'équations elliptiques, compte tenu de la régularité $C^{2+\alpha}(S^1)$ de $u(0, \cdot)$.

Il reste à vérifier l'injectivité de Ψ . Soient v et $\tilde{v}$ deux solutions de (55) vérifiant $p_2(v(0)) = p_2(\tilde{v}(0))$. Considérons $w = v - \tilde{v}$; c'est une solution de (55) avec $g \equiv 0$ et $p_2(w(0)) \equiv 0$. En notant encore c_n les coefficients de Fourier de w , qui décroissent exponentiellement, on aura :

(i) Pour les sous-espaces stables ou périodiques :

$$c(t) = C_1 \psi_1(t) + C_2 \psi_2(t)$$

et compte tenu de l'expression des solutions fondamentales, on peut affirmer que $C_1 = C_2 = 0$.

(ii) Pour les sous-espaces instables, on aura encore

$$c(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$$

avec cette fois-ci $C_1 + C_2 = c(0) = 0$, ce qui compte tenu de la décroissance exponentielle de c entraîne $C_1 = C_2 = 0$.

On vérifie aisément la continuité de l'application réciproque Ψ^{-1} . $\square$

5.6 Les "petites" solutions

Théorème 6 *Pour tout $z_0 \in E_2$, avec $|z_0|$ assez petit, il existe une solution u de (1) telle que $|u(x, t) - y_0(t)|$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION : Avec les notations précédentes considérons l'application

$$\Upsilon : u \longmapsto (w_{tt} + w_{xx} + (qy_0^{q-1}(t) - \lambda)w + Q(w), p_2(w(0)))$$

définie sur $E_\sigma^{2+\alpha}$ à valeurs dans $E_\sigma^\alpha \times E_2$.

On peut appliquer le Théorème d'inversion locale : on a $\Upsilon(0) = (0, 0)$ et la différentielle de Υ en 0, qui est égale à Ψ , est un isomorphisme. Pour tout couple $(0, z_0)$ assez voisin de $(0, 0)$ il existe w tel que $\Upsilon(w) = (0, z_0)$ ce qui montre bien l'existence de "petites" solutions pour lesquelles $|u(x, t) - y_0(t)| = |w|$ décroît exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini. $\square$

6 Equations partiellement homogénéisées

Dans le cas où $q = 3$, nous allons étudier l'influence d'un changement dans la non-linéarité, lorsqu'on remplace une puissance de y par sa moyenne sur S^1 . Nous regarderons plus particulièrement si toutes les solutions (positives)

s'homogénéisent lorsque $t \rightarrow +\infty$ et s'il existe des solutions "solitons" pour les équations

$$\begin{cases} (E_1) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + (\bar{y})^3 = 0 \\ (E_2) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + y(\bar{y})^2 = 0 \\ (E_3) & y_{tt} + y_{xx} - \lambda y + y\bar{y}^2 = 0 \end{cases}$$

où la moyenne d'une fonction f sur S^1 est notée comme précédemment $\bar{f}$. Posons

$$w(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (y(x, t) - \bar{y}(t))^2 dx$$

On a alors

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y(x, t) - \bar{y}(t)) (y(x, t) - \bar{y})_t dx \\ w''(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y(x, t) - \bar{y}(t)) (y(x, t) - \bar{y})_{tt} dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y_t(x, t) - \bar{y}_t(t))^2 dx \end{aligned}$$

6.1 L'équation E_1 .

Proposition 6.1 *Les solutions bornées de (E_1) s'homogénéisent lorsque t tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : L'équation vérifiée par $\bar{y}$ est

$$\bar{y}'' - \lambda \bar{y} + (\bar{y})^3 = 0$$

qui a été étudiée au paragraphe 3.1. En faisant la différence avec (E_1) et en multipliant par $(y - \bar{y})$ on obtient après intégration

$$w'' - 2w - \overline{y_x^2} \geq 0$$

Compte tenu de la définition de la première valeur propre non nulle du Laplacien sur S^1 , on a

$$\int_0^{2\pi} y_x^2 dx \geq \int_0^{2\pi} (y - \bar{y})^2 dx$$

puisque $(y - \bar{y})$ est une fonction de moyenne nulle. D'où la relation

$$w'' - 2(1 + \lambda)w \geq 0$$

Il est facile de voir qu'au voisinage de l'infini, $w(t) \leq Ce^{-t\sqrt{2(1+\lambda)}}$. $\square$

Le remplacement de y^3 par $(\bar{y})^3$ est trop brutal et entraîne l'homogénéisation de toutes les solutions bornées, ce qui n'est guère surprenant.

6.2 L'équation E_2 .

Proposition 6.2 *Les solutions positives bornées de E_2 s'homogénéisent lorsque t tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION : L'équation vérifiée par $\bar{y}$ est la même que ci-dessus

$$\bar{y}'' - \lambda\bar{y} + \bar{y}^3 = 0$$

L'équation vérifiée par w est

$$w'' - 2(1 + \lambda)w + 2\bar{y}^2w \geq 0$$

Décomposons y en série de Fourier sous la forme

$$y(x, t) = \bar{y}(t) + \sum_{n \neq 0} c_n(t)e^{inx}$$

Alors les c_n sont solutions de

$$z'' - (\lambda + n^2 - \bar{y}^2)z = 0 \tag{57}$$

L'étude de $\bar{y}$ montre que, soit $\bar{y}$ tend exponentiellement vers 0 à l'infini, soit $\bar{y}$ est une fonction périodique.

Dans le premier cas, la théorie classique des perturbations montre que les solutions bornées de (57) tendent exponentiellement vers 0.

Dans le deuxième cas, $\bar{y}^2 - \lambda$ est une fonction périodique et la théorie de FLOQUET s'applique à (57).

La moyenne $\bar{y}$ est solution de l'équation différentielle d'inconnue ψ

$$\psi'' + (\bar{y}^2 - \lambda)\psi = 0 \tag{58}$$

L'équation (58) possédant une solution périodique, à savoir $\bar{y}$, la valeur de λ correspond à la limite d'une zone de stabilité ; si on suppose que $\bar{y}$ est

positive, λ est alors en limite de la *première* zone de stabilité et toutes les autres équations (57) sont instables (au sens des Définitions 1). Elles possèdent une unique solution bornée, convergeant exponentiellement vers 0. $\square$

REMARQUE : Les calculs ci-dessus permettent de justifier l'existence de solutions bornées de E_2 définies à l'aide de leurs coefficients de Fourier.

6.3 L'équation E_3 .

Si y est solution de E_3 , l'équation vérifiée par $\bar{y}$ est cette fois-ci

$$\bar{y}'' - \lambda \bar{y} + (\overline{y^2})\bar{y} = 0$$

et celle satisfaite par w devient

$$w'' - 2(1 + \lambda)w + 2w\overline{y^2} \geq 0$$

Contrairement au cas précédent, il existe toujours des solutions de E_3 de type "soliton" i.e. de la forme $y(x, t) = f(x + \alpha t)$ où f est 2π -périodique. Comme $\overline{y^2}$ est constante, si f existe elle satisfait une équation à coefficients constants dont on peut chercher une solution de la forme

$$y(x, t) = A \sin(x + \alpha t) \tag{59}$$

L'identification, conduit à

$$1 + \alpha^2 = -\lambda + A^2/2$$

Ces solutions ne sont pas de signe constant et sont de moyenne nulle.

Existe-t-il des solutions y périodiques en temps ? Le même argument (basé sur la théorie de Floquet) déjà utilisé pour l'équation E_2 montre qu'il n'y a pas d'autres solutions doublement périodiques, de moyennes positives, à part les solutions (59) et les solutions "homogènes".

L'opérateur que nous avons introduit dans E_3 , à savoir

$$y \mapsto y_{xx} - \lambda y + y m(y^2)$$

n'est pas un opérateur local ; l'existence de solutions est-elle assurée ?

Proposition 6.3 *Il existe des solutions, non homogènes, de E_3*

DÉMONSTRATION : La méthode d'inversion locale que nous avons introduite à la section 5.4 peut s'appliquer à l'équation E_3 en considérant cette fois

$$\Upsilon : u \longmapsto (u'' + u_{xx} - \lambda u + u(\overline{u^2}), p_2(u(0))).$$

La différentielle $D\Upsilon$ est alors

$$v \mapsto (v'' + v_{xx} + (-\lambda + y_0^2)v + 2y_0^2\overline{v}, p_2(v(0)))$$

On peut donc appliquer la même théorie qu'au paragraphe 5.6 à quelques variantes près. $\square$

Théorème 7 *Soit y une solution positive, bornée, de E_3 , alors y s'homogénéise.*

DÉMONSTRATION : Ecrivons les relations satisfaites par les coefficients de Fourier de y ,

$$\begin{cases} \bar{y}'' + (-\lambda + \bar{y}^2 + \sum_{n \neq 0} c_n^2) \bar{y} & = 0 \\ c_n'' + (-\lambda - n^2 + \bar{y}^2 + \sum_{n \neq 0} c_n^2) c_n & = 0 \end{cases}$$

D'après les théorèmes de comparaison de Sturm-Liouville, entre deux zéros de c_n , il existe un zéro de $\bar{y}$. Si c_n s'annule deux fois, alors $\bar{y}$ et donc y n'est pas de signe constant ! On peut alors supposer, pour t assez grand, que c_n est de signe constant et positif (sans nuire à la généralité).

Multiplions la première relation par c_n et la deuxième par $\bar{y}$, on fait la différence et on obtient

$$c_n \bar{y}'' - \bar{y} c_n'' + n^2 c_n \bar{y} = 0 \quad (60)$$

Posons $A(t) = c_n \bar{y}' - \bar{y} c_n'$, on a alors

$$A(t_0) - A(t) = n^2 \int_{t_0}^t c_n(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau \quad (61)$$

Soit t_0 tel que $\forall t > t_0 \quad c_n(t) > 0$. On a immédiatement le

Lemme 6.4 *La fonction A décroît sur $]t_0, +\infty[$.*

Deux cas sont alors à envisager selon que A s'annule ou reste toujours positive.

(i) $\exists t_1 \quad \forall t > t_1 \quad A(t) < 0$. Dans ces conditions la fonction $c(t)/\bar{y}(t)$ est croissante car sa dérivée est du signe de $-A(t)$; elle admet une limite ℓ éventuellement infinie. Supposons $\ell < +\infty$, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour $t > t_2$

$$\left(\frac{c}{\bar{y}}\right)'(t) = \frac{n^2 \int_{t_2}^t c_n(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau - A(t_2)}{\bar{y}^2(t)} \geq n^2 \frac{\int_{t_2}^t \ell \bar{y}^2(\tau) d\tau}{2\bar{y}^2(t)}$$

On peut minorer cette dernière quantité

$$\left(\frac{c}{\bar{y}}\right)'(t) \geq \epsilon > 0$$

ce qui implique $c/\bar{y}$ tend vers l'infini : il y a contradiction avec l'hypothèse y positive et bornée.

(ii) $\forall t > t_0 \quad A(t) > 0$. On a alors

$$\int_{t_0}^t c_n(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau < A(t_0)$$

et compte tenu de la régularité de $c_n \bar{y}$ on peut affirmer que $c_n \bar{y}$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. De plus la fonction $c/\bar{y}$ est positive décroissante, elle admet donc une limite ℓ .

Si $\ell = 0$, alors $c^2 = (c/\bar{y})(c\bar{y})$ tend vers 0.

Si $\ell \neq 0$, alors $c\bar{y}$ se comporte comme $\ell \bar{y}^2$, donc $\bar{y}^2$ (et aussi c_n^2) tend vers 0.

Lemme 6.5 c_n est de signe constant.

DÉMONSTRATION : S'il existe un réel $t_0 \geq 0$, tel que $c_n(t_0) = 0$, alors $c'_n(t_0) > 0$ et donc $A(t_0) < 0$; on est donc dans la situation (i) et il y a contradiction. $\square$

On en déduit d'abord :

$$c_n(t) \bar{y}(t) = \frac{\bar{y}(t)}{c(t)} c^2(t) \geq \frac{\bar{y}(0)}{c(0)} c^2(t)$$

car $\bar{y}/c$ croît (puisque $c/\bar{y}$ décroît), puis

$$\frac{A(0)}{n^2} \geq \int_0^t c_n(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau \geq \frac{\bar{y}(0)}{c_n(0)} \int_0^t c^2(\tau) d\tau$$

On a donc montré

Lemme 6.6 $\int_0^{+\infty} c_n^2(\tau) d\tau < +\infty$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \neq 0} c_n^2(\tau) d\tau \leq \sum A(0) \frac{c_n(0)}{n^2 \bar{y}(0)} \leq \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \left(c_n^2(0) \frac{\bar{y}'(0)}{\bar{y}(0)} - c_n'(0) c_n(0) \right)$$

et cette dernière quantité est bornée. La convergence de l'intégrale entraîne donc l'homogénéisation de la solution. $\square$

6.4 Majoration des solutions

Proposition 6.7 *Les solutions positives des équations E_1 , E_2 et E_3 sont uniformément bornées.*

DÉMONSTRATION :

ETAPE 1 : Pour E_1 et E_2 , on sait d'après l'étude faite au paragraphe 3.1, que $\bar{y}$, et donc $\bar{y}_t$ sont bornées. De même pour E_3 ; en effet, puisque $\bar{y} \bar{y}^2 \geq \bar{y}^3$ on peut appliquer à $\bar{y}$ les résultats de la Propriété (3.2). Par suite, il existe une constante C telle que

$$\int_t^{t+1} \bar{y}^3 \leq C \quad \text{resp.} \quad \int_t^{t+1} \bar{y} \bar{y}^2 \leq C$$

dans le cas de E_1 et E_2 (resp. E_3).

ETAPE 2

La solution y admet dans chaque cas une représentation intégrale (c.f. [4]) sous la forme

$$y(t) = S(t)y(0) + \int_0^t S(s) \int_0^\infty S(\tau) \Phi(t + \tau - s) d\tau ds \quad (62)$$

avec

$$S(t) = e^{-t(-d^2/dx^2 + \lambda)^{1/2}}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \bar{y}^3 & \text{pour } E_1 \\ \Phi(t) &= y \bar{y}^2 & \text{pour } E_2 \\ \Phi(t) &= y \bar{y}^2 & \text{pour } E_3 \end{aligned}$$

On en déduit, par une adaptation des techniques de [4], que y demeure borné sur $[0, +\infty[\times S^1$.

Références

- [1] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences **75** (1988)
- [2] Berger M., Gauduchon P., Mazet E. *Le spectre d'une variété riemannienne* Springer-Verlag, Lecture notes in Math. 194 (1971).
- [3] Bidaut-Véron M.F., Véron L. Nonlinear elliptic equation on compact Riemannian Manifolds and asymptotics of Emden equations, *Invent. Math.* **106** (1991) 489-539.
- [4] Bouhar M., Veron L. Integral Representation of Solutions of Semilinear Elliptic Systems in Cylinders and Applications, *Nonlinear Analysis* **23** (1994) 275-296.
- [5] Brézis H. Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones. *Israel Journal of Mathematics* **12** Num{ero 1 (1972) 51-60.
- [6] Caffarelli L.A., Gidas B., Spruck J. Behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Applied Math.* **XLII** (1989) 271-297.
- [7] Gidas B., Spruck J. A priori Bounds for Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations.
- [8] Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Pure and Appl. Math.* **34** (1980) 525-598.
- [9] Licois J.R. Asymptotiques d'un système dynamique conservatif associé à une équation elliptique non linéaire. *Journal d'Analyse Mathématique* à paraître.
- [10] Véron L. Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans L^1 , *Rev. Roum. Math. Pura Appl.* **27** (1982) 95-123.
- [11] Whittaker, Watson. *A Course of MODERN ANALYSIS*. Cambridge University Press.