

## Mathématiques

### Travaux Dirigés n° 9

**Exercice 1** Soit la suite réelle de premier terme  $u_0 = 3$  et définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}.$$

- 1) Calculer  $u_1, u_2, u_3$ .
- 2) Montrer que tous les termes de la suite sont positifs.
- 3) On définit une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation  $v_n = \frac{-1 + u_n}{2 + u_n}$ .
  - a) Calculer  $v_0, v_1, v_2$ .
  - b) Montrer que  $v_n$  est une suite géométrique et préciser sa limite.
  - c) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

**Exercice 2** On considère la relation de récurrence linéaire

$$(*) \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

et on note  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite satisfaisant la relation  $(*)$  définie par  $w_0 = 3$  et  $w_1 = 8$ .

- 1) Calculer  $w_2, w_3$  et  $w_4$ .
- 2) Montrer qu'il existe deux suites géométriques  $x_n = q^n$  et  $y_n = r^n$  vérifiant la relation  $(*)$ .
- 3) Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $w_0 = ax_0 + by_0$  et  $w_1 = ax_1 + by_1$ . En déduire que  $w_n = 2^n + 2 \times 3^n$ ; comparer avec le 1).

**Exercice 3** On définit deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par leurs premiers termes  $u_0 = 1$  et  $v_0 = 12$  et la relation

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer  $u_1, u_2, v_1$  et  $v_2$ .
- 2) On définit une suite  $(x_n)$  par  $x_n = v_n - u_n$ . Montrer que  $(x_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le terme général.
- 3) On définit une suite  $(y_n)$  par  $y_n = 3u_n + 8v_n$ . Montrer que  $(y_n)$  est une suite constante.
- 4) En déduire l'expression du terme général de  $(u_n)$  et  $(v_n)$  et préciser leurs limites.