

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 7

Exercice 1

1) Calculer J_1 avec

$$J_1 = \iint_D \sin(x+y) \, dx dy \quad \text{avec } D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

2) a) Soient a et b deux réels ; en utilisant une intégration par parties calculer $\int \ln(ax+b) \, dx$.

b) Calculer J_2 et vérifier le théorème de Fubini en remarquant que $\frac{2x}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$.

$$J_2 = \iint_D \frac{2x}{x^2-y^2} \, dx dy \quad \text{avec } D = [1; 2] \times [0; 1/2].$$

Exercice 2

1) Calculer les intégrales doubles suivantes, après avoir représenté les domaines correspondants. On vérifiera le théorème de Fubini pour J_3 .

$$J_3 = \iint_T e^{2x+3y} \, dx dy \quad \text{avec } T = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y < 6\},$$

$$J_4 = \iint_{C'} xy \, dx dy \quad \text{avec } C' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\},$$

$$J_5 = \iint_{C''} xy \, dx dy \quad \text{avec } C'' = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

2) En utilisant les résultats précédents, calculer la valeur de $J_6 = \iint_C xy \, dx dy$ où C est le domaine situé dans le quart de plan $x \geq 0, y \geq 0$ délimité par le cercle de centre 0 et de rayon 1 et le cercle de centre 0 et de rayon 2.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = xy$ et T le triangle de sommets $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ et $C(0, 1)$.

1) Représenter les domaines définis par $T_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1+x\}$ et $T_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq (2-x)/2\}$.

2) Calculer $I_1 = \iint_{T_1} f(x, y) \, dx dy$ et $I_2 = \iint_{T_2} f(x, y) \, dx dy$.

3) En déduire la valeur de $I = \iint_T f(x, y) \, dx dy$.

4) Calculer directement I en l'écrivant sous la forme

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\text{?}}^{\text{?}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$