

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 4

Exercice 1

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes, puis calculer une primitive.

$$f_1(x) = \frac{6x}{x^2 + 4x - 5}, \quad f_2(x) = \frac{16}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}, \quad f_3(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + 1},$$

Exercice 2

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}.$$

2) Soit $t > 0$ un nombre réel.

a) Calculer $J(t) = \int_0^t f(x) dx$.

b) En déduire la limite de $J(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 3

On pose $J = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

1) a) Mettre le trinôme $x^2 + 4x + 5$ sous forme canonique.

b) Faire le changement de variable $t = x + 2$ dans J et en déduire l'expression de J .

2) On pose $J_2 = \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$.

a) Montrer la relation

$$J_2 = \int \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

b) Montrer que la première intégrale se calcule facilement et calculer la deuxième en utilisant une méthode analogue à celle du 1).

3) Calculer

$$J_3 = \int_0^{1/2} \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} dx$$

après avoir effectué une décomposition en éléments simples.