

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 3

Exercice 1

Soient les complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $\alpha = z_1 z_2$.

- 1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- 2) Mettre α sous forme cartésienne.
- 3) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
- 4) Déterminer les valeurs de l'entier n tels que α^n soit réel (resp. imaginaire pur).

Exercice 2

- 1) Après avoir montré que $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$ calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg}(x) dx.$$

2) Calculer $I_2 = \int \operatorname{arctg}(x) dx$ et $I_3 = \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $J_n = \int x^n e^{-x} dx$.

- a) En utilisant une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} .
- b) En déduire l'expression de J_n en fonction de n .

Exercice 3

1) a) Exprimer $\sin^2(t) \cos^2(t)$ en fonction de $\sin^2(2t)$. En déduire $\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^2(t) dt$.

b) Calculer $J_1 = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

2) Soit $J_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$.

- a) Calculer J_2 en utilisant le changement de variables $u = e^x$.
- b) Calculer J_2 en utilisant le changement de variables $u = e^{2x}$.

3) Calculer $J_3 = \int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.