

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 2

Exercice 1

- 1) Vérifier que la fonction tangente est une bijection de $] -\pi/2; \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vérifie $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$.
- 2) On note arctg la bijection réciproque de la fonction tangente.
 - a) Déterminer $\operatorname{arctg}(0)$, $\operatorname{arctg}(1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x)$.
 - b) Justifier que $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2

- 1) Soient les nombres complexes $z_1 = 3(1+i)$, $z_2 = 3i$, $z_3 = \frac{3}{2}(-1+i)$.
Calculer z_1^2 , $z_1 z_3$, $\frac{z_2 - z_3}{z_1}$, $\frac{z_3}{z_1}$.
- 2) Soit θ un nombre réel et z le nombre complexe défini par $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
 - a) Mettre sous forme cartésienne $\bar{z}$, z^2 et montrer que $z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$.
 - b) Développer le polynôme $(X - z)(X - \bar{z})$.
 - c) En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + X + 1 = 0$.

Exercice 3

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 2z^2 + (4 + 6i)z - 20$.

- 1) Calculer $P(-2i)$. Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$.
- 2) Vérifier que $(z^2 + az + b) = (z - 3 + i)(z + 1 - 3i)$; en déduire les racines de P .