

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

On considère les fonctions définies par

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

- 1) Vérifier la relation $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
- 2) Calculer les dérivées de ces fonctions et vérifier la relation $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.
- 3) a) Etude et représentation de ces trois fonctions.
b) En déduire que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$.

Exercice 2

On considère les fonctions f , g et h définies par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad h(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de ces fonctions puis calculer leurs dérivées.
- 2) a) Calculer $\operatorname{sh}(f(x))$, $\operatorname{ch}(g(x))$.
b) En déduire que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et préciser la bijection réciproque.
c) En déduire que la fonction ch est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser la bijection réciproque.
- 3) On note φ la bijection réciproque de la fonction th et on veut déterminer la fonction dérivée φ' .
a) Justifier la relation $\varphi(\operatorname{th}(x)) = x$.
b) Dériver cette relation à l'aide de la formule de dérivation des fonctions composées.
c) En déduire la relation $\varphi'(y) = \frac{1}{1 - y^2}$.
d) Montrer alors que $\varphi = h$.