

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 12

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs propres de A .
- 2) Déterminer les vecteurs propres associés et en déduire que A est diagonalisable.
- 3) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = P D P^{-1}$.

Exercice 2

Reprendre les questions de l'exercice 1 avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On ne demande pas de calculer P^{-1} .

Exercice 3

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \frac{d}{dt} X(t) = A X(t),$$

où A est une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes.

- 1) On suppose dans cette question que A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Ecrire les équations vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$ et résoudre le système (S) .

- 2) On suppose que A est diagonalisable, $A = P D P^{-1}$ où D est diagonale et on pose $Y(t) = P^{-1} X(t)$.

a) Justifier rapidement que $\frac{d}{dt} Y(t) = P^{-1} \frac{d}{dt} X(t)$.

b) En déduire que Y est solution du système $\frac{d}{dt} Y(t) = D Y(t)$.

c) En déduire la forme générale des solutions de (S) .

- 3) Application : Résoudre le système (S) lorsque A est la matrice de l'exercice 1 et déterminer la solution de (S) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.