

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 9

Exercice 1 On considère les deux relations de récurrence linéaire

$$(R_1) \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \quad (R_2) \quad u_{n+2} = 2\sqrt{2}u_{n+1} - 4u_n$$

- 1) a) Chercher une solution de (R_1) sous la forme d'une suite géométrique $u_n = u_0 r^n$ avec $r \in \mathbb{R}$.
b) En déduire la solution de (R_1) telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
- 2) a) Chercher une solution de (R_2) sous la forme d'une suite géométrique $u_n = u_0 r^n$ avec $r \in \mathbb{C}$.
b) Montrer directement que la suite définie par $w_n = 2^n \cos(n\pi/4)$ vérifie (R_2) ; on rappelle que : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
c) En déduire la solution de (R_2) telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

Exercice 2

On considère la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $4u_{n+1} = 3u_n + 1$.

- 1) a) Représenter graphiquement les deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = 3x + 1$.
b) Utiliser ce graphique pour représenter u_{n+1} à partir du point de coordonnées $(u_n, 0)$.
c) Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et u_0 . Convergence de la suite u_n ?
- 2) Mêmes questions pour la suite définie par $3v_{n+1} = 4v_n - 1$ et la droite $y = 4x - 1$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et deux suites réelles u_n et v_n définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et la relation

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- 1) On donne $u_0 = 1\,000$ et $v_0 = 200$; calculer u_1, v_1, u_2, v_2 .
- 2) Dans le cas général on considère les suites x_n et y_n définie par $x_n = 2u_n - v_n$ et $y_n = u_n + v_n$.
a) Montrer que x_n est une suite géométrique dont on précisera la raison λ .
b) Que peut-on dire de la suite y_n ?
c) En déduire l'expression du terme général de x_n et de y_n en fonction de u_0 et v_0 puis celle de u_n et v_n .
- 3) Diagonaliser la matrice A et expliquer les résultats de la question 2).
- 4) Application : Dans une entreprise il y a deux sortes de personnels : les cadres et les employés. Chaque année 20% de employés deviennent cadres et 10% des cadres partent à la retraite et sont remplacés par des employés. On note u_n et v_n le nombre de cadres et d'employés à l'année n .
a) Montrer que u_n et v_n satisfont la relation (1).
b) Quelle sera la distribution limite si $u_0 = 1\,000$ et $v_0 = 200$?

Corrigé feuille 8 : On a $I_2 = \int_0^{\pi/3} \left(\int_1^{1/\cos(\theta)} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{dr}{r^3} \right) d\theta$ avec $\int_1^{1/\cos(\theta)} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{dr}{r^3} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \left[\frac{r^{-2}}{-2} \right]_1^{1/\cos(\theta)} = -\frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. D'où $I_2 = \left[\frac{1}{4} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \ln(\cos(\theta)) \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{3}{16} \approx 0,159$.