

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1

1) Soit D le disque défini par $x^2 + y^2 \leq 1$; calculer, à l'aide des coordonnées polaires

$$J_4 = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)} dx dy.$$

2) Soit T le domaine défini par les conditions $x \geq 0$, $x \leq 1$, $y \geq 0$ et $y - x \leq 0$.

a) Représenter T .

b) Calculer $K = \iint_T x dx dy$ en utilisant les coordonnées cartésiennes.

c) Définir T à l'aide des coordonnées polaires, puis calculer K en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 2 mai 99

Soit $\mathcal{D}$ le domaine défini par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer

$$J_5 = \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy$$

Exercice 3

1) Soit D_2 le domaine intersection du disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 ($\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$) et du demi-plan des y positifs.

a) Montrer que D_2 est défini en coordonnées polaires par $\{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ et } 0 \leq r \leq 2 \cos(\theta)\}$.

b) Calculer $\iint_{D_2} (x + y) dx dy$.

2) Représenter le domaine $\mathcal{D}'$ délimité par le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et les droites $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$ avec $x \geq 0$

$$\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x \leq 1, y \geq 0, y \leq x\sqrt{3}\}$$

et calculer l'intégrale double $I_2 = \iint_{\mathcal{D}'} \frac{y}{x(x^2 + y^2)^2} dx dy$ en utilisant les coordonnées polaires.

Corrigé de l'exercice 2 feuille 7

On a $I_1 = \int_0^1 (\int_1^{2-x} f(x, y) dy) dx$ avec $\int_1^{2-x} f(x, y) dy = \frac{x^2}{x-2} + x^2 = x^2 + x + 2 + \frac{4}{x-2}$. D'où $I_1 = \frac{17}{6} - 4 \ln(2)$.

De même $I_2 = \int_{-2}^0 (\int_1^{(x+4)/2} f(x, y) dy) dx$ avec $\int_1^{(x+4)/2} f(x, y) dy = x^2 - 2\frac{x^2}{x+4} = x^2 - 2x + 8 - \frac{32}{x+4}$. D'où $I_2 = -32 \ln(2) + \frac{68}{3}$. Finalement $I_1 + I_2 = \frac{51}{2} - 36 \ln(2)$.

D'autre part $I = \int_1^2 (\int_{2y-4}^{2-y} f(x, y) dx) dy$ avec $\int_{2y-4}^{2-y} f(x, y) dx = -3y + 18 - \frac{36}{y} + \frac{24}{y^2}$, d'où $I = \frac{51}{2} - 36 \ln(2)$.