

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 6

Exercice 1

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$(E_3) \quad y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 10 \cos(x).$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 12e^{-x}$ et on note E' l'équation homogène associée.

- 1) Déterminer un réel r tel que la fonction e^{rx} soit solution de (E') .
- 2) Soit y une solution de (E) . On définit une fonction z en posant $y(x) = e^{2x}z(x)$.
 - a) Montrer que la fonction dérivée de z , $Z = z'$, satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre.
 - b) Résoudre cette équation.
 - c) En déduire la solution générale de (E) .

Exercice 3

Soit ω un réel non nul ; on définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$f(x) = e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x).$$

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis vérifier que f est solution de l'équation $y''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $(E_2) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ où a et b sont deux réels fixés.

- 1) Ecrire l'équation caractéristique associée à (E_2) et mettre le trinôme sous forme canonique. A quelle conditions sur a et b les racines sont-elles complexes conjuguées ?
- 2) Soit y une solution de (E_2) ; on définit une fonction z en posant $y(x) = e^{-ax/2}z(x)$.
 - a) Montrer que z est solution d'une équation de la forme $z''(x) + Kz(x) = 0$ où K est un réel que l'on déterminera.
 - b) Discuter selon les valeurs de a et b le signe de K .
 - c) En déduire la forme générale des solutions de (E_2) selon le signe de K . (*On pourra utiliser l'exercice 3.*)