

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 5

Exercice 1 *Équation à variables séparables*

Il s'agit d'une équation de la forme $f(y(x))y'(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions continues. Si on note F (resp. G) une primitive de f (resp. de g) l'équation est équivalente à la relation $F(y(x)) = G(x) + K$ où K est une constante.

1) a) Justifier l'affirmation précédente.

b) A quelle condition suffisante peut-on écrire la solution sous la forme d'une fonction explicite de la variable x ?

2) a) Résoudre l'équation $(E_1) \quad y'(x) = x^2(y^2(x) + 1)$.

b) Déterminer la solution y de (E_1) définie par $y(0) = 1$.

3) a) Résoudre $(E_2) \quad x y'(x) = (y(x) - 1)(y(x) - 2)$.

b) Déterminer la solution y de (E_2) définie par $y(1) = 0$ et préciser son domaine de définition.

Exercice 2 *Équation linéaire homogène*

Il s'agit d'un cas particulier d'équation à variable séparable $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ où $a(x)$ est une fonction continue. La méthode précédente montre que l'équation équivaut à $\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$, soit

$\frac{d}{dx} \ln |y(x)| = a(x)$. Dès qu'on connaît une primitive de $a(x)$, la solution générale est donnée par

$$y(x) = K e^{\int a(x) dx}.$$

1) Résoudre $(E_3) \quad (2 + \cos(x))y'(x) - \sin(x)y(x) = 0$.

2) Résoudre $(E_4) \quad (x^2 + 1)y'(x) - x y(x) = 0$.

Exercice 3 *Méthode de variation de la constante*

Dans le cas d'une équation linéaire avec second membre $y'(x) - a(x)y(x) = g(x)$, la solution est donnée par la méthode suivante. On cherche la solution de l'équation homogène associée $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ qui est de la forme $K f(x)$; on cherche ensuite la solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = K(x) f(x)$.

1) Montrer que la méthode ci-dessus conduit à résoudre une équation de la forme $K'(x) = \dots$, c'est-à-dire se ramène à un calcul de primitive.

2) Résoudre $(E_5) \quad (2 + \cos(x))y'(x) - \sin(x)y(x) = \sin(2x)$.

3) Résoudre $(E_6) \quad (x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = (x + 1)^2$.