

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 4

Exercice 1 *Contrôle Continu novembre 1999*

En utilisant une intégration par parties calculer

1) $\int x \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) dx.$

2) $\int_0^{\pi/3} x^2 \arctan(x) dx.$ On pourra utiliser la relation $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$

Exercice 2 *Changement de variable*

1) Soit f une fonction impaire définie sur l'intervalle $[-a; a]$; en utilisant le changement de variable $t = -x$ montrer que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

2) Après avoir remarqué que $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

en utilisant les changements de variables $u = x + \frac{1}{2}$ et $u = \frac{\sqrt{3}}{2}v.$

3) Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - 1}$ en utilisant le changement de variable $x = \sin \theta.$ Pouvait-on prévoir le résultat, sachant que $y = \sqrt{x^2 - 1}$ est l'équation d'un demi-cercle ?

Corrigé de l'exercice 4 du TD 3

1) $g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}.$

2) a) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(u) + K.$

b) $\int g(x) dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K.$

3) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{2(x^2+1)} + K$ d'où $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) + K.$