

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 3

Exercice 1 *Éléments simples de deuxième espèce.*

1) Calculer $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$ en écrivant $\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$.

2) Soit f définie par $f(x) = \frac{5x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$; déterminer b, c tels que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.

En déduire $\int f(x) dx$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = i\sqrt{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ et $z_4 = \sqrt{3} - i$.

1) Représenter graphiquement z_1, z_2 et z_3 .

2) Calculer $\frac{z_2 - z_3}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}$ et $Z = z_1 z_4$.

3) a) Mettre z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme trigonométrique.

b) Mettre Z sous forme trigonométrique et en déduire les expressions de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 2z^2 + (4 - 6i)z - 20$.

1) Calculer $P(2i)$. Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.

2) Après avoir calculé $(1+i)^2$, déterminer les racines de P .

Exercice 4

1) Décomposer en éléments simples $g(x) = \frac{3}{x^3-1} = \frac{3}{(x^2+x+1)(x-1)}$.

2) a) En remarquant que $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, et en utilisant le changement de variable

$(x + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} u$, calculer une primitive de $\frac{1}{x^2+x+1}$.

b) Après avoir remarqué que $x + 2 = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{3}{2}$, calculer une primitive de g .

3) En utilisant une intégration par parties ($u = x, v' = \dots$), calculer $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$; en déduire $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ en remarquant que $x^2 = (x^2+1) - 1$.