

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 10

Exercice 1

- 1) Résoudre l'équation différentielle homogène $(E_h) \quad y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$.
- 2) Déterminer une solution particulière de l'équation $(E_1) \quad y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = (8x + 6)e^x$.
- 3) Déterminer une solution particulière de l'équation $(E_2) \quad y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = (8x + 6)e^{-x}$.
- 4) En déduire la solution de l'équation $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = (8x + 6)\operatorname{ch}(x)$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 2

Soit E_2 l'ensemble des trinômes de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$; on considère l'application φ qui à $P(x)$ associe $P''(x) + 4P'(x) + 3P(x)$.

- 1) Calculer $\varphi(ax^2 + bx + c)$.
- 2) Montrer que les coefficients a' , b' et c' de $\varphi(ax^2 + bx + c)$ s'expriment en fonction de a , b et c sous forme matricielle.
- 3) En déduire que, pour tout a' , b' et c' , l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = a'x^2 + b'x + c'$ admet une unique solution particulière qui est un trinôme.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Calculer le polynôme caractéristique de A ; en déduire les valeurs propres de A et les vecteurs propres correspondants.

b) En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

- 2) a) Justifier que, pour n entier, $A^n = P D^n P^{-1}$; en déduire l'expression de A^n .

b) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = 0$. Montrer que le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ vérifie la relation $X_{n+1} = AX_n$.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , u_0 et u_1 .

- 3) a) Soit y une solution de (E_h) (cf Exercice 1). On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer directement que Y vérifie $Y'(t) = AY(t)$.

b) On pose $Z(t) = P^{-1}Y(t)$. Montrer que Z vérifie $Z'(t) = DZ(t)$; en déduire les coordonnées de $Z(t)$, puis celles de $Y(t)$.