

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1

On considère la relation de récurrence linéaire (R) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

- 1) Déterminer les suites géométriques qui satisfont (R).
- 2) On note (v_n) la solution de (R) définie par $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$.
 - a) Donner l'expression explicite de v_n en fonction de n .
 - b) Comparer v_n et v_{n+4} .

Exercice 2

Soit A une matrice vérifiant $A^2 = -A + 6 \text{Id}$.

- 1) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n \text{Id},$$

et que (a_n) et (b_n) satisfont les relations $a_{n+1} = b_n - a_n$, $b_{n+1} = 6a_n$.

- 2) En déduire que (a_n) satisfait la relation de récurrence

$$a_{n+1} + a_n - 6a_{n-1} = 0.$$

Déterminer alors a_n et b_n .

- 3) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8 .

Exercice 3

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E1) $y'(x) + y(x) = x^2$.

- 2) On considère l'équation différentielle (E2) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^{2x}$.

a) Soit y une solution de (E2); on pose $y(x) = e^{2x} z(x)$. Montrer que $z(x)$ satisfait une équation différentielle que l'on précisera.

b) En déduire que $z'(x)$ est solution de (E1).

c) En déduire la solution générale de (E2).