

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 6

Exercice 1 *Équation à variables séparables*

Il s'agit d'une équation de la forme $f(y(x))y'(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions continues. Si on note respectivement F et G une primitive de f et g l'équation est équivalente à $F(y(x)) = G(x) + K$ où K est une constante.

- 1) Justifier l'affirmation précédente.
- 2) Résoudre $(E_1) \quad y^2(t) + 1 - t y'(t) = 0.$

Exercice 2 *Équation linéaire homogène*

Il s'agit d'un cas particulier d'équation à variable séparable $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ où $a(x)$ est une fonction continue. La méthode précédente montre que l'équation équivaut à $\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$, soit $\frac{d}{dx} \ln |y(x)| = a(x)$, ce qui conduit à la solution générale $y(x) = K e^{\int a(x) dx}$ dès qu'on connaît une primitive de $a(x)$.

Résoudre

$$\begin{aligned} (E_{3a}) \quad & (1 + x^2)y'(x) - xy(x) = 0. \\ (E_{3b}) \quad & (x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3 *Méthode de variation de la constante*

Dans le cas d'une équation linéaire avec second membre $y'(x) - a(x)y(x) = g(x)$, on peut chercher une solution par la méthode suivante. On cherche la solution de l'équation homogène associée $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ qui est de la forme $K f(x)$; on cherche ensuite la solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = K(x) f(x)$.

- 1) Montrer que la méthode ci-dessus conduit à résoudre une équation de la forme $K'(x) = \dots$, c'est-à-dire à calculer une primitive.
- 2) Résoudre $(E_4) \quad (1 + x^2)y'(x) - xy(x) = \sqrt{1 + x^2}.$
- 3) Résoudre l'équation différentielle $(E_5) \quad 2x(1 - x)y'(x) + (1 - x)y(x) = \sqrt{x}.$

Exercice 4 *équation de Ricatti*

On considère l'équation

$$(E_6) \quad y'(x) + y(x) + y^2(x) = 0.$$

- 1) Soit y une solution qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer en divisant par y^2 que $z = 1/y$ est solution d'une équation linéaire.
- 2) Résoudre alors E_6 .