

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 4

Exercice 1 *Contrôle Continu novembre 1999*

Soit f définie par
$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x - 3)^2(x - 1)}.$$

1) Déterminer les réels a , b , c tels que

$$f(x) = \frac{a}{(x - 3)^2} + \frac{b}{x - 3} + \frac{c}{x - 1}.$$

2) En déduire $\int f(x) dx$.

Exercice 2

On considère la fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{3}{x^3 + 1}$.

1) Décomposer f en éléments simples et vérifier que

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

2) Calculer $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ en écrivant $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ et en utilisant le changement de variable défini par $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t$.

3) En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 3

1) Factoriser les polynômes $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ et $Q_2(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.

2) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$f_1(x) = \frac{x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 7x + 5}{Q_1(x)} \quad f_2(x) = \frac{x^4 - 17x^2 + x + 35}{Q_2(x)}.$$

3) Calculer $\int f_1(x) dx$ et $\int f_2(x) dx$.