

## Mathématiques

### Travaux Dirigés n° 1

#### Exercice 1

- 1) a) Calculer les dérivées des fonctions définies par  $f_1(x) = x \sin(x) + \cos(x)$ ,  $f_2(x) = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x)$  et  $f_3(x) = \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}$ .
- b) Sachant que  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ , comparer les dérivées des fonctions définies par  $g_1(x) = \cos(2x)$ ,  $g_2(x) = \cos^2(x)$  et  $g_3(x) = \sin^2(x)$ .
- 2) a) Etudier les variations de  $f_4(x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$ .
- b) Représenter la fonction définie par  $f_5(x) = \sin(x) + \sin(2x)$ .

#### Exercice 2

- 1) Calculer la dérivée de la fonction définie par  $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$ .
- 2) Etude et représentation graphique de la fonction  $g : x \mapsto x + \ln(x^2 - 1)$ , de la fonction  $h : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ .

#### Exercice 3

On rappelle que  $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ,  $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .

- 1) Montrer que pour tout  $t$ , le point de coordonnées  $(\operatorname{sh}(t), \operatorname{ch}(t))$  appartient à la courbe (H) d'équation cartésienne  $y = \sqrt{1 + x^2}$ ; faire une représentation graphique de (H).
- 2) a) Représenter graphiquement la fonction sinus hyperbolique  $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ .
- b) Discuter selon les valeurs de  $y \in \mathbb{R}$  l'existence et le nombre des solutions de  $\operatorname{sh}(x) = y$ . On pourra poser  $X = e^t$  et se ramener à une équation du second degré.
- c) En déduire que  $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ .
- 3) Calculer, par deux méthodes différentes (à partir de l'expression ci-dessus et en utilisant la formule de dérivation des fonctions réciproques), la dérivée de  $\operatorname{argsh}(x)$ .
- Pour  $a > 0$ , calculer la dérivée de  $\operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right)$ .
- 4) Calculer les dérivées des fonctions définies par  $h_1(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $h_2(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$  et  $h_3(x) = \arctan\left(\frac{x + a}{1 - ax}\right)$  pour  $a \in \mathbb{R}$  fixé; conclusion?