

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 11

Exercice 1

L'espace vectoriel E_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est rapporté à la base (P_1, P_2, P_3) avec $P_1(x) = \sqrt{3}$, $P_2(x) = \sqrt{5}x$ et $P_3(x) = \sqrt{7}x^2$.

On considère la forme bilinéaire φ définie sur E_3 par

$$\varphi : (P, Q) \longmapsto \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x) Q(x) x^2 dx.$$

- 1) a) Déterminer la matrice associée à φ relativement à la base (P_1, P_2, P_3) .
b) φ est-elle symétrique ? définie positive ?
- 2) a) La base (P_1, P_2, P_3) est-elle orthonormée par rapport à φ ?
b) Si non, déterminer un polynôme P_4 tel que la base $B' = (P_1, P_2, P_4)$ soit orthonormée pour φ .
c) En utilisant ce qui précède, calculer les coordonnées du polynôme $Q_1(x) = x^2 + x + 1$ relativement à la base B' .

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique, on considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Exprimer la forme quadratique f associée à A .
b) f est-elle dégénérée ? f est-elle positive ?
- 2) a) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $A = P D {}^tP$.
b) En déduire une décomposition en carrés de f .