

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 10

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles

$$\begin{aligned}(E_1) \quad & y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\(E_2) \quad & y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 10 \cos(x) \\(E_3) \quad & y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \\(E_4) \quad & y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 2x + 2 \\(E_5) \quad & y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^3 + x)e^{2x}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1) Pour quelles valeurs de A et B la fonction $x \mapsto (A + B \ln(x))e^{-x}$ est-elle solution de l'équation différentielle

$$(E_6) \quad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1-x}{x^2}e^{-x}$$

2) Déterminer la solution générale de (E_6) .

3) Déterminer la solution de (E_6) telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 3

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) &= 3x(t) - z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) &= x(t) - z(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1) Mettre le système sous forme matricielle $X'(t) = M X(t)$.

2) a) Montrer qu'on peut écrire $M = P D P^{-1}$ où D est une matrice diagonale que l'on précisera.

b) On pose $Y = P^{-1}X$; montrer que Y est solution d'un système différentiel linéaire très simple que l'on résoudra.

3) Déterminer la solution de (S) telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.