

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 7

Exercice 1

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même dont la matrice rapportée à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & 6 \\ 4 & 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$, ensemble des X tels que $AX = \tilde{O}$; préciser sa dimension et en donner une base.
- 2) On note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des vecteurs Y tels que le système $AX = B$ possède une solution.

a) Justifier que le vecteur $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Im}(f)$.

b) Indiquer une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice rapportée à la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer B^2 et B^3 ; calculer $B^3 + 2B^2 - B$.
- 2) Calculer le polynôme caractéristique de g .
- 3) Diagonaliser B .
- 4) En utilisant les résultats du 1), déterminer la matrice inverse de B .

Exercice 3

Discuter selon les valeurs du paramètre m le nombre de solutions des systèmes

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + (m^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (S') \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2m - 1 \\ 2x + y + (m^2 - 1) = 2m - 1 \end{cases}$$