

Travaux Dirigés 5

Exercice 1 Équation à variables séparables

Il s'agit d'une équation de la forme $f(y(x))y'(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions continues. Si on note respectivement F et G une primitive de f et g l'équation est équivalente à $F(y(x)) = G(x) + K$ où K est une constante.

1) Justifier l'affirmation précédente.

2) a) Résoudre l'équation (E_1) $y'(x) = (y(x) + 1)(x^2 + 1)$.

b) Résoudre (E_2) $y'(x) = \frac{(y(x) - 1)(y(x) - 2)}{x^2 + 1}$.

Exercice 2 Équation linéaire homogène

Il s'agit d'un cas particulier d'équation à variable séparable $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ où $a(x)$ est une fonction continue. La méthode précédente montre que l'équation équivaut à $\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$,

soit $\frac{d}{dx} \ln |y(x)| = a(x)$, ce qui conduit à la solution générale

$$y(x) = K e^{\int a(x) dx}$$

dès qu'on connaît une primitive de $a(x)$.

1) Résoudre (E_3) $y'(x) + \tan(x)y(x) = 0$.

2) Résoudre (E_4) $(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = 0$.

Exercice 3 Méthode de variation de la constante

Dans le cas d'une équation linéaire avec second membre $y'(x) - a(x)y(x) = g(x)$, on peut chercher une solution par la méthode suivante. On cherche la solution de l'équation homogène associée $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ qui est de la forme $K f(x)$; on cherche ensuite la solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = K(x) f(x)$.

1) Montrer que la méthode ci-dessus conduit à résoudre une équation de la forme $K'(x) = \dots$, c'est-à-dire à calculer une primitive.

2) Résoudre (E_5) $y'(x) + \tan(x)y(x) = \cos(x)$.

3) Résoudre (E_6) $(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = (x + 1)^2$.