

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

On rappelle que $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

1) Montrer que pour tout t , le point de coordonnées $(\operatorname{sh}(t), \operatorname{ch}(t))$ appartient à la courbe (H) d'équation cartésienne $y = \sqrt{1 + x^2}$; faire une représentation graphique de (H).

2) a) Représenter graphiquement la fonction sinus hyperbolique $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

b) Discuter selon les valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'existence et le nombre des solutions de $\operatorname{sh}(x) = y$. On pourra poser $X = e^t$ et se ramener à une équation du second degré.

c) En déduire que $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

3) Calculer, par deux méthodes différentes (à partir de l'expression ci-dessus et en utilisant la formule de dérivation des fonctions réciproques), la dérivée de $\operatorname{argsh}(x)$.

Pour $a > 0$, calculer la dérivée de $\operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right)$; en déduire une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

1) Représenter graphiquement z_1 , z_2 et z_3 .

2) Calculer $\frac{z_2 - z_3}{z_1}$ et $\frac{z_3}{z_1}$.

Exercice 3

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

2) Exprimer z_3 sous forme cartésienne.

3) Calculer z_3^{2005} .