

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 9

Exercice 1

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$\frac{d}{dt}X(t) = A X(t)$ où A est une matrice carrée à 2 lignes.

1) Que peut-on dire des composantes $x(t)$, $y(t)$ de $X(t)$ si A est une matrice diagonale ?

2) On suppose A diagonalisable, $A = P D P^{-1}$ où D est diagonale et on pose $Y(t) = P^{-1} X(t)$.

a) Montrer que Y satisfait la relation $\frac{d}{dt}Y(t) = D Y(t)$.

b) En déduire l'expression de $X(t)$ en fonction de $x(0)$ et $y(0)$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer directement que $x(t)$ et $y(t)$ donnés par $x(t) = \alpha e^{t r_1} + \beta e^{t r_2}$, $y(t) = \gamma e^{t r_1} + \delta e^{t r_2}$ où r_1 et r_2 sont les valeurs propres de A et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés, est solution du système.

b) Comparer avec l'exercice 2 du TD précédent.

Exercice 2

On considère le système différentiel $\frac{d}{dt}X(t) = A X(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. On note $x(t)$ la première coordonnée d'une solution $X(t)$ du système précédent.

1) a) Que peut-on dire de la deuxième coordonnée de $X(t)$?

b) En déduire que $x(t)$ satisfait la relation : $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$.

2) On définit une suite u_n en posant $u_n = x^{(n)}(0)$ valeur en 0 de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de x . Montrer que u_n satisfait une relation de récurrence linéaire que l'on précisera. Expliquez !

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles

$$(E_1) \quad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

$$(E_2) \quad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 10 \cos(x)$$

$$(E_3) \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$

$$(E_4) \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$(E_5) \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^3 + x)e^{2x}.$$

Corrigé de la question 3) de l'exercice 2 du TD8

On a

$$A X_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha r_1^n + \beta r_2^n \\ \gamma r_1^n + \delta r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha r_1^n + a\beta r_2^n + b\gamma r_1^n + b\delta r_2^n \\ c\alpha r_1^n + c\beta r_2^n + d\gamma r_1^n + d\delta r_2^n \end{pmatrix}$$

La première coordonnée s'écrit encore $r_1^n(a\alpha + b\gamma) + r_2^n(a\beta + b\delta)$ et la deuxième $r_1^n(c\alpha + d\gamma) + r_2^n(c\beta + d\delta)$.

Par définition $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre r_1 , on a donc la relation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $a\alpha + b\gamma = r_1\alpha$ et $c\alpha + d\gamma = r_1\gamma$. De même pour $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ qui donne les relations $a\beta + d\delta = r_2\beta$ et $c\beta + d\delta = r_2\delta$.

En reportant ces deux relations dans $A X_n$ on obtient

$$A X_n = \begin{pmatrix} r_1^n(r_1\alpha) + r_2^n(r_2\beta) \\ r_1^n(r_1\gamma) + r_2^n(r_2\delta) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire exactement X_{n+1} .