

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1

On considère les deux relations de récurrence linéaire

$$(R_1) \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad (R_2) \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

- 1) Chercher une solution de (R_1) , puis de (R_2) , sous la forme d'une suite géométrique $u_n = u_0 r^n$ avec $r \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{C}$.
- 2) a) En déduire la solution de (R_1) telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
b) En déduire la solution de (R_1) telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

Exercice 2

Soit A une matrice carrée à p lignes et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ définie par son premier terme X_0 et la relation $X_{n+1} = A X_n$.

- 1) a) Justifier rapidement que $X_n = A^n X_0$.
b) Que peut-on dire des composantes de X_n si A est une matrice diagonale ?
- 2) On suppose A diagonalisable, $A = P D P^{-1}$ où D est diagonale et on pose $Y_n = P^{-1} X_n$.
a) Montrer que Y_n satisfait la relation $Y_{n+1} = D Y_n$.
b) En déduire X_n .
c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.
- 3) On suppose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer directement que u_n et v_n donnés par

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad v_n = \gamma r_1^n + \delta r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les valeurs propres de A et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$) sont des vecteurs propres associés, sont solutions de $X_{n+1} = A X_n$.

- 4) On considère la suite réelle définie par la relation

$$(R_3) \quad u_{n+2} - \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n = 0$$

avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que X_n satisfait une relation $X_{n+1} = A X_n$ avec une matrice A à préciser.
- b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- c) Comparer le polynôme caractéristique de A et l'équation caractéristique de (R_3) .