

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 6

Exercice 1

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 et A^3 .
- 2) Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier le théorème de Cayley-Hamilton.
- 3) En déduire que A est inversible et l'expression de A^{-1} .

Exercice 2

1) On donne la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

2) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer le polynôme caractéristique de C .
 - b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de C .
 - c) La matrice C est-elle inversible ? diagonalisable ?
- 3) a) Déterminer une matrice P telle que $P^{-1} C P$ soit une matrice diagonale.
- b) En déduire l'expression de C^n en fonction de n .
 - c) Calculer C^{-1} .

Exercice 3

On note E_3 l'espace vectoriel des trinômes du second degré, rapporté à la base (canonique) $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. On considère l'application φ qui à un polynôme $P(x)$ associe le polynôme $P(x) + (x+1)P'(x)$. Montrer que φ est une application linéaire de E_3 dans lui-même et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$; φ est-elle bijective ?