

## Travaux Dirigés n° 3

### Exercice 1

Soient les nombres complexes  $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i)$ ,  $z_2 = 3i\sqrt{2}$  et  $z_3 = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ .

1) Représenter graphiquement  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .

2) Calculer  $\frac{z_2 - z_3}{z_1}$  et  $\frac{z_3}{z_1}$ .

### Exercice 2

On considère le polynôme  $P(z) = z^3 - 2z^2 + (4 + 6i)z - 20$ .

1) Calculer  $P(-2i)$ . Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$ .

2) Déterminer les racines de  $P$  (on pourra calculer  $(1 - i)^2$ ).

### Exercice 3

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  et  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ .

2) Exprimer  $z_3$  sous forme cartésienne.

3) Calculer  $z_3^{2003}$ .

### Exercice 4

1) Factoriser  $z^3 - 1$  et  $z^3 + 1$ . En déduire les racines dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^6 = 1$ .

2) A tout nombre complexe  $u$  différent de 1, on associe  $z = \frac{u+1}{u-1}$ . Exprimer  $u$  en fonction de  $z$ .

3) En utilisant ce qui précède, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(u+1)^6 = (u-1)^6$  et représenter les images des racines.

### Exercice 5

1) Résoudre l'équation  $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$  où  $\theta \in [0; \pi]$ . Factoriser alors le polynôme  $z^2 - 2z \cos \theta + 1$ .

2) Soit le polynôme  $P(z) = (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)(z^2 - 2z \cos \beta + 1)$ . Déterminer  $\alpha \in [0; \pi]$  et  $\beta \in [0; \pi]$  de sorte que  $P(z) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1$ . En déduire les racines de  $P$ .