

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 3

Exercice 1

On considère la fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{3}{x^3 + 1}$.

1) Décomposer f en éléments simples et vérifier que

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2-x+1}.$$

2) Calculer $\int \frac{1}{x^2-x+1} dx$ en utilisant un changement de variable. (On pourra mettre x^2-x+1 sous forme canonique).

3) En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 2

Soit $f_2 : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Calculer les dérivées partielles premières de f_2 , puis calculer $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}$.

Exercice 3

PARTIE A

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2yz + 6x^2 + y^2 + z^2$.

1) a) Calculer les dérivées partielles premières de f et vérifier que le point A de coordonnées $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$ est un point stationnaire de f .

2) Calculer la matrice hessienne de f et déterminer la nature du point A.

3) a) Déterminer les autres points stationnaires de f ; on pourra calculer $y \frac{\partial f}{\partial y} - z \frac{\partial f}{\partial z}$.

b) Étudier la nature de ces points.

PARTIE B

On considère la fonction $F(x, y) = f(x, y, 2)$ définie par

$$F(x, y) = x^4 - 4x^2y + 6x^2 + y^2 + 4$$

Soit le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 4\}$.

On admettra que $\mathcal{D}$ est fermé et borné.

1) Déterminer les extrema de F sous la contrainte $y - x^2 = 0$.

2) Déterminer le minimum et le maximum absolu (global) de F dans $\mathcal{D}$.

