

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

On rappelle que $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

1) Montrer que pour tout t , le point de coordonnées $(\operatorname{sh}(t), \operatorname{ch}(t))$ appartient à la courbe (H) d'équation cartésienne $y = \sqrt{1 + x^2}$; faire une représentation graphique de (H).

2) a) Représenter graphiquement la fonction sinus hyperbolique $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

b) Discuter selon les valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'existence et le nombre des solutions de $\operatorname{sh}(x) = y$. On pourra poser $X = e^t$ et se ramener à une équation du second degré.

c) En déduire que $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

3) Calculer, par deux méthodes différentes (à partir de l'expression ci-dessus et en utilisant la formule de dérivation des fonctions réciproques), la dérivée de $\operatorname{argsh}(x)$.

Pour $a > 0$, calculer la dérivée de $\operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right)$; en déduire une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

Exercice 2

1) Effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q (i.e. déterminer le quotient et le reste) pour

$$P(x) = 2x^4 + 5x^2 - 10x + 1, \quad Q(x) = 2x^2 - 5x + 5,$$

$$P(x) = x^5 + x + 1, \quad Q(x) = x^2 + x + 1,$$

$$P(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1, \quad Q(x) = (x - 1)^2.$$

2) a) Factoriser les polynômes $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ et $Q_2(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.

b) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$f_1(x) = \frac{x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 7x + 5}{Q_1(x)} \quad f_2(x) = \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{Q_2(x)}.$$