

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1 On considère la relation de récurrence $(R_1) \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$.

1) Soit y la solution de $(E_1) \quad y'' - 5y' + 6y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 5$.

On pose $u_n = y^{(n)}(0)$ (dérivée n^{ième} de y en 0). Montrer que u_n satisfait la relation (R_1) .

2) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire la solution de (R_1) .

Exercice 2 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1) Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

2) Calculer le polynôme caractéristique de M et déterminer ses racines. La matrice est-elle diagonalisable ? Expliquer à quoi correspond θ .

3) Explication : montrer que l'on a $M = P D P^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

et retrouver le résultat précédent.

Exercice 3

On considère la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $4u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1) Faire une représentation graphique.

2) Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et u_0 . Convergence de la suite u_n ?

3) Mêmes questions pour la suite définie par $3v_{n+1} = 4v_n - 1$.

Exercice 4

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$ et préciser les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2) Calculer M^2, M^3 et vérifier le théorème de Cayley-Hamilton.

3) En utilisant ce qui précède montrer que M^4, M^5 peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de Id, M, M^2 .

4) Généraliser en montrant qu'on peut trouver a_n, b_n et c_n tels que $M^n = c_n \text{Id} + b_n M + a_n M^2$. Quelles relations de récurrence satisfont les a_n, b_n, c_n ?