

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 10

Exercice 1 suite de l'exercice 4 du T.D. 8

1) Montrer qu'on peut écrire $M = P D P^{-1}$ où P est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et D une matrice diagonale

que l'on précisera.

2) Calculer P^{-1} et en déduire l'expression de M^n pour n entier.

3) Soit n un entier strictement positif. On effectue la division euclidienne du polynôme λ^n par le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$

$$\lambda^n = P_M(\lambda)Q_n(\lambda) + R_n(\lambda).$$

Montrer que $R_n(\lambda) = a_n\lambda^2 + b_n\lambda + c_n$ où a_n , b_n et c_n ont été définis dans l'exercice 4 du T.D. 8.

4) a) En remplaçant λ par les valeurs propres de M , montrer que a_n , b_n et c_n sont solutions d'un système linéaire.

b) Résoudre ce système et retrouver les résultats de la question 2).

Exercice 2

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) &= 3x(t) - z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) &= x(t) - z(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1) Mettre le système sous forme matricielle.

2) Avec les notations de l'exercice précédent, on pose $Y = P^{-1}X$; montrer que Y est solution d'un système différentiel linéaire très simple que l'on résoudra.

3) Déterminer la solution de (S) telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.