

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 10

Exercice 1

1) Soit $f_1(x, y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^4 + 8y^2$.

a) Calculer $I(x) = \int_1^2 f_1(x, y) dy$.

b) Calculer $J(y) = \int_0^1 f_1(x, y) dx$.

c) Vérifier que $\int_1^2 J(y) dy = \int_0^1 I(x) dx$.

2) Même question avec $f_2(x, y) = \sin(\pi(x + y)) + e^{2x} \cos(\pi y)$.

Exercice 2

1) Soit D_1 le domaine défini par $D_1 = \{(x, y) \mid x \in [0; 1], 0 \leq y \leq 2x\}$.

a) Représenter D_1 .

b) Calculer $I(x) = \int_0^2 x f_1(x, y) dy$, puis $\int_0^1 I(x) dx$.

c) Calculer $J(y) = \int_y^{2^1} f_1(x, y) dx$, puis $\int_0^2 J(y) dy$.

d) En déduire $\iint_{D_1} f_1(x, y) dx dy$.

2) Soit D_2 le domaine intersection du disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 ($\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$) et du demi-plan des y positifs. Calculer $\iint_{D_2} (x + y) dx dy$.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$(E_1) \quad 2y''(t) + y'(t) - 3y(t) = 0$$

$$(E_2) \quad y''(t) - y'(t) + \frac{5}{4}y(t) = 0$$

$$(E_3) \quad 2y''(t) + y'(t) - 3y(t) = \sin(2t)$$

$$(E_4) \quad 2y''(t) + y'(t) - 3y(t) = e^{2t}(7t^2 + 25t + 20)$$

$$(E_5) \quad y''(t) - y'(t) + \frac{5}{4}y(t) = e^{-t}(8 \sin(2t) - \cos(2t))$$

Exercice 4

1) Montrer que les équations (E_1) et (E_2) se ramènent chacune à un système différentiel linéaire, dont on calculera la matrice associée, en prenant comme inconnue $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Calculer, dans chaque cas, le polynôme caractéristique de la matrice; que constate-t-on? expliquez!

2) a) Montrer que dans (E_4) si on pose $y(t) = z(t)e^{2t}$, la fonction z satisfait

$$(E_6) \quad 2z''(t) + 9z'(t) + 7z(t) = 7t^2 + 25t + 20$$

Résoudre (E_6) en cherchant une solution particulière sous forme d'un polynôme.

b) Faire de même pour (E_5) .