

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 9

Exercice 1

Soit A une matrice carrée à p lignes et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ définie par son premier terme X_0 et la relation $X_{n+1} = A X_n$.

- 1) a) Justifier rapidement que $X_n = A^n X_0$.
b) Que peut-on dire des composantes de X_n si A est une matrice diagonale ?
- 2) On suppose A diagonalisable, $A = P D P^{-1}$ où D est diagonale et on pose $Y_n = P^{-1} X_n$.
a) Montrer que Y_n satisfait la relation $Y_{n+1} = D Y_n$.
b) En déduire X_n .
c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- 3) On suppose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On cherche directement u_n et v_n sous la forme

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad v_n = \gamma r_1^n + \delta r_2^n$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, r_1$ et r_2 sont à déterminer.

a) En reportant dans la relation $X_{n+1} = A X_n$ montrer que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, r_1$ et r_2 doivent satisfaire 4 relations que l'on écrira explicitement.

b) En déduire que r_1 et r_2 sont les valeurs propres de A et que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés.

c) Reprendre l'application du 2) c) (sans faire de nouveaux calculs).

4) On considère la suite réelle définie par la relation

$$u_{n+2} - \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n = 0 \tag{1}$$

avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que X_n satisfait une relation $X_{n+1} = A X_n$ avec une matrice A à préciser.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

c) Comparer le polynôme caractéristique de A et l'équation caractéristique de (1) ?

Exercice 2

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$\frac{d}{dt}X(t) = A X(t)$ où A est une matrice carrée à 2 lignes.

1) Que peut-on dire des composantes $x(t)$, $y(t)$ de $X(t)$ si A est une matrice diagonale ?

2) On suppose A diagonalisable, $A = P D P^{-1}$ où D est diagonale et on pose $Y(t) = P^{-1} X(t)$.

a) Montrer que Y satisfait la relation $\frac{d}{dt}Y(t) = D Y(t)$.

b) En déduire l'expression de $X(t)$ en fonction de $x(0)$ et $y(0)$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3) On suppose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche directement $x(t)$ et $y(t)$ sous la forme

$$x(t) = \alpha e^{tr_1} + \beta e^{tr_2}, \quad y(t) = \gamma e^{tr_1} + \delta e^{tr_2}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, r_1$ et r_2 sont à déterminer.

a) En reportant dans la relation $X_{n+1} = A X_n$ montrer que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, r_1$ et r_2 doivent satisfaire 4 relations que l'on écrira explicitement.

b) En déduire que r_1 et r_2 sont les valeurs propres de A et que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés.

c) Comparer avec la question 2) et avec l'exercice précédent.