

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 8

Exercice 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Calculer le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$ et préciser les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
b) Calculer M^2, M^3 et vérifier le théorème de Cayley-Hamilton.
c) En utilisant ce qui précède montrer que M^4, M^5 peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de Id, M, M^2 .
d) Généraliser en montrant qu'on peut trouver a_n, b_n et c_n tels que

$$M^n = c_n \text{Id} + b_n M + a_n M^2. \quad (1)$$

Quelles relations de récurrence satisfont les a_n, b_n, c_n ?

- 2) a) Effectuer la division euclidienne du polynôme λ^4 puis du polynôme λ^5 par $P_M(\lambda)$.
b) On effectue la division euclidienne de λ^n par $P_M(\lambda)$

$$\lambda^n = P_M(\lambda)Q(\lambda) + a_n \lambda^2 + b_n \lambda + c_n. \quad (2)$$

Pour n fixé, montrer qu'en remplaçant λ par les valeurs propres de M on obtient des relations permettant de déterminer a_n, b_n et c_n en fonction des λ_i^n .

- c) Quel rapport y a-t-il entre (1) et (2) ?
- 3) a) Dédurre des résultats précédents l'expression de M^n en fonction de n .
b) Comparer avec la méthode utilisant diagonalisation et matrice de passage.

Exercice 2

Memmes questions pour la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour la question 2b) on pourra dériver par rapport à λ la relation (2).