

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 6

Exercice 1

On considère l'application linéaire $f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y)$.

- 1) Quelle est la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
- 2) Déterminer le noyau de f .
- 3) Déterminer l'image de f et préciser sa dimension.
- 4) Mêmes questions pour l'application $g : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 4y)$ et pour l'application $h : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 4z, 3x + 4y + 5z)$.

Exercice 2

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Par la méthode de Gauss,
b) En utilisant les cofacteurs.
- 2) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 59 & 7 & -24 \\ 5 & 1 & 0 \\ -49 & -5 & 24 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) Soient a, b, c trois réels distincts ; calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

2) En déduire qu'il existe une unique polynôme de degré 2 $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ tel que $P(a) = 1$, $P(b) = 0$ et $P(c) = 0$; donner une forme explicite en utilisant les formules de Cramer.