

Travaux Dirigés n° 4

Exercice 1 *Éléments simples de première espèce.*

1) Déterminer les réels a, b, c tels que $f_1(x) = \frac{6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

En déduire $\int f_1(x)dx$.

2) Même question pour $f_2(x) = \frac{36}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$.

3) Décomposer en éléments simples puis intégrer sur un intervalle convenable $f_3(x) = \frac{16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

Exercice 2 *Éléments simples de deuxième espèce.*

1) Calculer $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$ en écrivant $f_4(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$.

2) Déterminer b, c tels que $f_5(x) = \frac{5x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.

En déduire $\int f_5(x)dx$.

3) Décomposer en éléments simples puis intégrer $f_6(x) = \frac{3}{x^3-1} = \frac{3}{(x^2+x+1)(x-1)}$.

On pourra remarquer que $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

4) En utilisant une intégration par parties ($u = x, v' = \dots$); calculer $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$; en déduire

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ en remarquant que $x^2 = (x^2+1) - 1$.

Exercice 3

Calculer $\int \frac{x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 12x^2 + 8x - 3}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2} dx$ après avoir déterminé les coefficients manquants dans

$$f_6(x) = \frac{x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 12x^2 + 8x - 3}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} + \frac{1}{(x^2-x+1)^2}.$$