

Travaux Dirigés n° 2

Exercice I Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles premières, les dérivées partielles secondes et vérifier le Théorème de Schwarz.

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= x^2 y^3 (1 - x - y) \\f_2(x, y) &= \ln(x^2 + xy + y^2) \\f_3(x, y) &= (x + y)e^{2y+1} + (x - y)e^{-x+2} \\f_4(x, y) &= (x + 2y)\sqrt{1 + x^2 + 4y^2}\end{aligned}$$

Exercice II Soit $f_5(x, y) = (x^2 - y^2)e^{x+y}$.

- 1) Calculer les dérivées partielles premières de f_5 .
- 2) Le point $(0, 0)$ est-il un point stationnaire de f_5 : ☐ oui ☐ non
- 3) Combien f_5 possède-t-elle de points stationnaires : ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ou plus

Exercice III Soit $f_6(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + (x - z)^3$.

- 1) Donner l'expression de la matrice hessienne de f_6 au point (x, y, z) .
- 2) Quelle est la nature du point $(0, 0, 0)$:
☐ minimum ☐ maximum ☐ point selle ☐ ce n'est pas un point stationnaire
- 3) Quelle est la nature du point $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$:
☐ minimum ☐ maximum ☐ point selle ☐ ce n'est pas un point stationnaire
- 4) Quelle est la nature du point $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$:
☐ minimum ☐ maximum ☐ point selle ☐ ce n'est pas un point stationnaire

Exercice IV Soit la fonction $f_7(x, y, z) = z^4 - (x + y + 1)z^2 + 2x^2 + 3y^2 + 5xy + x$.

- 1) Calculez les dérivées partielles premières de f_7 .
- 2) Montrer que le point $(6, -5, 0)$ est stationnaire pour f_7 et étudier la nature de ce point.
- 3) Déterminer les autres points stationnaires de f_7 et préciser leur nature.

Exercice V Quatre des fonctions étudiées dans cette feuille ont leur graphique représentés au verso ; attribuez chaque graphique à une fonction.

(a)

(c)