

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 1

Exercice 1

- 1) On pose $z = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$; mettre sous forme cartésienne $\bar{z}$, $1/z$, z^2 .
Développez le polynôme $(Z - z)(Z - \bar{z})$, en déduire les racines de $Z^2 - 2 \cos(\varphi)Z + 1 = 0$.
- 2) Mettre sous forme trigonométrique $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $\alpha = z_1/z_2$.
Mettre α sous forme cartésienne et en déduire l'expression de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
Déterminer les entiers n tel que α^n soit réel (resp. imaginaire pur).
- 3) Soit $j = e^{2i\pi/3}$; calculer $1 + j + j^2$ de deux façons différentes : en utilisant la forme cartésienne, puis la somme des termes d'une suite géométrique.
En déduire une factorisation de $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

On rappelle que $\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

- 1) Montrer que pour tout t , le point de coordonnées $(\text{sh}(t), \text{ch}(t))$ appartient à la courbe d'équation cartésienne $y = \sqrt{1 + x^2}$; faire une représentation graphique.
- 2) Discuter selon les valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'existence et le nombre des solutions de $\text{ch}(x) = y$ (resp. $\text{sh}(x) = y$).
En déduire que $\text{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$; donner l'expression de $\text{argch}(y)$.
- 3) Calculer, par deux méthodes différentes, la dérivée de $\text{argsh}(x)$ puis celle de $\text{argch}(x)$.
Pour $a > 0$, calculer la dérivée de $\text{argsh}(\frac{x}{a})$, de $\text{argch}(\frac{x}{a})$; en déduire une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$.