

Mathématiques

Travaux Dirigés n° 9

Exercice 1

Quelle(s) relation(s) doivent vérifier les coefficients a et b pour que toute solution de l'équation différentielle $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ soit bornée sur $[0; +\infty[$?

Exercice 2

On rappelle que $\forall t \geq 1, \ln(t) < \sqrt{t}$.

Etudier la convergence de l'intégrale $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. A l'aide du changement de variable $x = 1/t$ en déduire la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ puis la valeur de $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 3

En utilisant une intégration par parties montrer que les intégrales impropres

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}$$

sont de même nature et préciser si elles sont convergentes ou divergentes.

Exercice 4

Soient les domaines $D_1 = [0; 1] \times [0; 1]$, $D_2 = \{(x, y) \text{ tels que } x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 3\}$. Représenter D_1 et D_2 et calculer

$$J_1 = \iint_{D_1} (x+y)^2 dx dy \quad J_2 = \iint_{D_2} (x+y)^2 dx dy \quad J_3 = \iint_{D_2} \frac{1}{(x+y)^3} dx dy.$$

Exercice 5

1) Soit D le disque défini par $x^2 + y^2 \leq 1$; calculer, à l'aide des coordonnées polaires

$$J_4 = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)} dx dy.$$

2) Soit T le domaine défini par les conditions $x \geq 0, y \geq 0, y \geq 0$ et $y - x \leq 0$.

a) Représenter T .

b) Calculer $K = \iint_T x dx dy$ en utilisant les coordonnées cartésiennes.

c) Définir T à l'aide des coordonnées polaires, puis calculer K en utilisant les coordonnées polaires.